PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - ay & = & 2 \\ ax - y & = & a+1 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right)$

Estudiamos cuándo puede ser $\operatorname{rg}(A) = 2$ resolviendo la ecuación $\det(A) = 0$

$$\det(A) = -1 + a^2 = 0 \Rightarrow a = \left\{\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}\right.$$

Si $a = -1$, las matrices quedan $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ y $\operatorname{rg}(A) = 1$ y $\operatorname{rg}(A^*) = 2$, luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$, las matrices quedan $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ y $\operatorname{rg}(A) = 1$ y $\operatorname{rg}(A^*) = 1$, luego el sistema es no homogéneo, compatible e indeterminado.

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ entonces $\det(A) \neq 0$ y por tanto $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A^*) = 2$, con lo que el sistema es no homogéneo compatible determinado.

El sistema tiene solución única cuando $a \neq -1$ y $a \neq 1$. En ese caso el sistema es de Cramer y se puede resolver mediante la regla de Cramer:

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{cc} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{array}\right| = -2+a^2+a \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{a^2+a-2}{a^2-1} = \frac{(a+2)(a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a+2}{a-1}$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{array}\right| = a+1-2a = 1-a \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$$

La solución del sistema es $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a+2}{a-1} \\ \\ y = \dfrac{1}{a-1} \end{array}\right.$

b) Si $a=1$ el sistema es equivalente a $\{x-y=2$, que tiene infinitas soluciones.

Una de ellas es $\left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \end{array}\right.$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, $y=\dfrac{1}{a-1} \Rightarrow \dfrac{1}{a-1}=2 \Rightarrow 1=2a-2 \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad a=1$ y $a=\dfrac{3}{2}$