	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)** Curso **2004-2005** **MATERIA:** MATEMÁTICAS II	Junio Septiembre R1 R2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: x + z = \lambda$$
$$\pi_2: 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2$$
$$\pi_3: 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda$$

2. (2 puntos). Se consideran las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

a) (1 punto). Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.
b) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a).

3. (3 puntos). Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
b) (1 punto). Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
c) (1 punto). Hallar todas las matrices X que satisfacen: $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

4. (3 puntos). Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.
b) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.
c) (1 punto). Hallar el valor de $a>0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en b) sea mínima.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Dada la función $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x-1}$ donde *ln* significa *logaritmo neperiano*, definida para $x>1$, hallar un punto (a , $f(a)$) tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

2. (2 puntos). Se considera la función:

$$f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto). Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.
b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx=1/4$$

3. (3 puntos). Se considera la familia de planos:

$$mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$$

siendo m un parámetro real.
Se pide:
a) (1 punto). Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
b) (1 punto). Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto P(1,1,0).
c) (1 punto). Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$r:\begin{cases}x-2z+1=0\\-y+z+1=0\end{cases}$$

4. (3 puntos). Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Hallar A^{10}.
b) (1 punto). Hallar la matriz inversa de B.
c) (1 punto). En el caso particular $k=0$, hallar B^{10}.

J S R1 R2

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1. Cálculo de los rangos de las matrices del sistema: 1 punto.
   Interpretación correcta: 1 punto.

2. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 1 punto.

3. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 0,5 puntos por el planteamiento.
   0,5 puntos por la resolución.
   Apartado c): 1 punto.

4. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 0,5 puntos por el planteamiento.
   0,5 puntos por cada uno de los puntos de corte.
   Apartado c): 0,5 puntos por el planteamiento.
   0,25 puntos por calcular *a*.
   0,25 puntos por justificar que es un mínimo.

OPCIÓN B

1. Planteamiento: 1 punto.
   Resolución: 1 punto.

2. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 1 punto.

3. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 1 punto.
   Apartado c): 1 punto.

4. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 1 punto.
   Apartado c): 1 punto.

MATEMATICAS II

SOLUCIONES

SEPT.

* Opción A *

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2\lambda+2 & 0 & -\lambda-6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(-3\lambda-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -8/3 \end{cases}$

$\boxed{\lambda \notin \{-8/3, 2\}\text{, se cortan en un punto}}$

$\boxed{\lambda = 2 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad rg(B) = 3\text{, no se cortan } (\pi_1 \parallel \pi_2)}$

$\boxed{\lambda = -8/3 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{pmatrix} \quad rg(B) = 3\text{, no se cortan } (\pi_1 \parallel \pi_3)}$

(2) a) $\vec{v}_r\,(1,1,2)$ $\quad \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (-3,1,1)$ $\quad \boxed{t \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$

$\vec{v}_s\,(1,2,1)$

b) $\begin{cases} -3\lambda - \lambda = 4 \\ -6\lambda - \lambda = 7 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \boxed{P(3,-1,-1)}$

(3) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$

$\boxed{\alpha = 2 \quad \beta = -1}$

b) $A^2 = 2A - I$; $\quad A^4 = 4A^2 - 4A + I = \dots = 4A - 3I$

$A^5 = 4A^2 - 3A = \dots = 5A - 4I$ $\quad \boxed{A^5 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) $X \cdot A = A \cdot X$; $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}}$

$c = 0$; $a = d$

(4) a) $y = \frac{1}{x}$; $y' = -\frac{1}{x^2}$ $\quad \boxed{y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a)}$

b) $x = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \Rightarrow y = \frac{2}{a}$ $\quad \boxed{A = \left(0, \frac{2}{a}\right)}$

$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow x = 2a$ $\quad \boxed{B = (2a, 0)}$

$\Rightarrow \text{dist.} = +\sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}$; $\quad g = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}$; $\quad g' = \dfrac{8a - \frac{8}{a^3}}{2\sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}} = 0 \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$(a > 0)$

* Opción B *

(1) $f(x) = 2\ln x - \ln(x-1)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow 2x - 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (a=2)$

$$\boxed{P(2, \ln 4)}$$

---

2) a) $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$; $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot 2e^x}{(1+e^x)^3}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

0

$y' > 0$ ↗ ↘ $y' < 0$

$\boxed{x=0 \text{ máximo absoluto}}$

.) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4}$

$1+e^a = 4 \Rightarrow \boxed{a = \ln 3}$

---

3) a) $\boxed{r \begin{cases} -2y + 3z + 1 = 0 \\ x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}}$

Otra opción:

$\begin{matrix} m=0 \\ m=1 \end{matrix} \begin{cases} -2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 6z + 2 = 0 \end{cases}$

ad lib.
(2 valores cuales quiera a m)

b) $m + m - 2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{3}y + 4z + \dfrac{4}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{x - 5y + 12z + 4 = 0}$

c) $\vec{v}_r(+2, +1, +1)$; $2m + m - 2 + 3m + 3 = 0 \Rightarrow 6m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{6}$

$-\dfrac{1}{6}x - \dfrac{13}{6}y + \dfrac{15}{6}z + \dfrac{5}{6} = 0$

$$\boxed{x + 13y - 15z - 5 = 0}$$

) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

) $\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \boxed{B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$