

**INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN**

**INSTRUCCIONES:** El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

**PUNTUACIÓN:** La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

**Tiempo:** 90 minutos

**OPCIÓN A**

**Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.**

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje  $OX$  al menos una vez en el intervalo  $[-1, 1]$ .

b) Determinar razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje  $OX$  cuando  $x$  recorre toda la recta real.

**Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.**

a) (1 punto) Determinar el punto  $P$ , contenido en el primer cuadrante, en el que se cortan la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 = 8$ .

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto  $P$  hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva  $y = \frac{x^2}{2}$  comprendido entre el origen y el punto  $P$ .

**Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.**

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro  $\lambda$  el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

**Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dados los puntos  $A(-1, 1, 1)$ ,  $B(1, -3, -1)$  y  $C(1, 0, 3)$ , hallar las coordenadas de un punto  $D$  perteneciente a la recta:

$$r \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro  $ABCD$  tenga un volumen igual a 2.

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que  $a$  es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax + 4y + az = -a \\ 4x + ay - az = a \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- (1 punto) Discutir el sistema.
- (1 punto) Resolver el sistema para  $a = 1$ .

### Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0.$$

- (1 punto) Hallar  $A^n$ .

### Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función  $f(x) = \ln(1 + x^2)$ , donde  $\ln$  significa *Logaritmo Neperiano*.

- (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de  $f$ .
- (1 punto) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  en sus puntos de inflexión.

### Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la recta  $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{2}$ , y la familia de rectas dependiente del parámetro  $m$ :

$$s \equiv \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

- (2 puntos) Determinar el valor de  $m$  para el que las dos rectas  $r$  y  $s$  se cortan.
- (1 punto) Para el caso  $m = 0$ , hallar la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .

## MATEMÁTICAS II

### SOLUCIONES Y CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

#### OPCIÓN A

**Ejercicio 1.** Apartado a): 1 punto. Apartado b): 1 punto.

**Ejercicio 2.** Apartado a): 1 punto. Apartado b): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución correcta.

**Ejercicio 3.** Apartado a): 1 punto por el cálculo correcto de los rangos, y 1 punto por la discusión correcta. Apartado b): 1 punto.

**Ejercicio 4.** 2 puntos por el planteamiento, 1 punto por la resolución correcta. Restar 0,5 puntos si sólo se encuentra una solución.

#### OPCIÓN B

**Ejercicio 1.** Apartado a): 1 punto. Apartado b): 1 punto.

**Ejercicio 2.** Apartado a): 1 punto. Apartado b): 1 punto.

**Ejercicio 3.** Apartado a): 0,5 puntos por crecimiento y decrecimiento, 0,5 puntos por concavidad y convexidad. Apartado b): 1 punto. Apartado c) : 1 punto.

**Ejercicio 4.** Apartado a): 1,5 puntos planteamiento; 0,5 puntos resolución correcta. Apartado b): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución correcta.