

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Primera resolución

El lugar geométrico pedido es una hipérbola con focos en los puntos A y B .

La distancia focal es $d(A, B) = 4 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$

El centro es el punto medio del segmento \overline{AB} , el punto $C = (0, 1)$.

Dos vértices de la hipérbola son $D = (0, \frac{1}{2})$ y $E = (0, \frac{3}{2})$, que cumplen la condición y están en la recta determinada por A y B .

Un eje mide $d(D, E) = 1 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Calculamos el otro eje: $c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow 2^2 = (\frac{1}{2})^2 + a^2 \Rightarrow a = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}}$

La ecuación es $\frac{(y-1)^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{(x-0)^2}{(\sqrt{\frac{15}{4}})^2} = 1$ que simplificada queda $\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{15}{4}} = 1$

Solución La hipérbola de ecuación $\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{15}{4}} = 1$

Segunda resolución

El lugar geométrico pedido es una hipérbola de focos los puntos A y B . Llamamos $P = (x, y)$ a un punto cualquiera de ella y encontramos la ecuación escribiendo algebraicamente la condición y simplificando la expresión.

$$\begin{aligned}d(P, A) - d(P, B) &= 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} - \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 1 \Rightarrow \\&\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 1 + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow \\&\Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 1 + x^2 + (y+1)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow \\&\Rightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = 1 + x^2 + y^2 + 2y + 1 + 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow \\&\Rightarrow -8y + 7 = 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow 64y^2 - 112y + 49 = 4x^2 + 4y^2 + 8y + 4 \Rightarrow \\&\Rightarrow 60y^2 - 120y + 45 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 60y^2 - 120y + 60 - 4x^2 = 15 \Rightarrow \\&\Rightarrow 60(y-1)^2 - 4x^2 = 15\end{aligned}$$

Solución La hipérbola de ecuación $60(y-1)^2 - 4x^2 = 15$