PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se consideran las rectas: $r : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$; $s : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

b) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1,0,0)$.

a) Para decidir el método que vamos a usar para calcular la distancia entre las rectas comenzamos por estudiar su posición relativa.

De la ecuación de r se obtiene un punto $P_r = (0,1,3)$ y su vector de dirección $\vec{v}_r = (1,-2,2)$.

De la ecuación de s se obtiene un punto $P_s = (2,0,-1)$ y su vector de dirección $\vec{v}_s = (3,1,-1)$.

Los vectores de dirección no son proporcionales, así que las rectas se cortan o se cruzan. Para decidirlo calculamos el producto mixto $[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$.

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-6-4-24-1-4 = -35 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

Para calcular la distancia se necesita $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$:

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,7,7)$$

La distancia es: $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \dfrac{|-35|}{\sqrt{0^2+7^2+7^2}} = \dfrac{35}{\sqrt{98}} = 3,536$

Solución: 3,536 u

b) Llamamos t a la recta pedida. Su vector de dirección es $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (0,7,7) \Rightarrow \vec{v}_t = (0,1,1)$ Daremos t como intersección de los planos Π y Σ que la contienen.

Π es el plano que pasa por el punto P_r y está generado por $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_t$:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4x-(y-1)+z-3 = -4x-y+z-2 \Rightarrow \Pi \equiv 4x+y-z+2=0$$

Σ es el plano que pasa por el punto P_s y está generado por $\vec{v}_s$ y $\vec{v}_t$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2)-3y+3(z-1) = 2x-3y+3z-7 \Rightarrow \Sigma \equiv 2x-3y+3z-7=0$$

Solución: $\begin{cases} 4x+y-z+2=0 \\ 2x-3y+3z-7=0 \end{cases}$

c) Daremos la recta pedida como intersección de los planos que la contienen.

Π_r es el plano que pasa por el punto P_r y está generado por $\overrightarrow{PP_r}$ y $\vec{v}_r$:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x+5(y-1)+z-3 = 8x+5y+z-8 \Rightarrow \Pi_r \equiv 8x+5y+z-8=0$$

Π_s es el plano que pasa por el punto P_s y está generado por $\overrightarrow{PP_s}$ y $\vec{v}_s$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x-2-2y+z-1 = x-2y+z-3 \Rightarrow \Pi_s \equiv x-2y+z-3=0$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad \begin{cases} 8x+5y+z-8=0 \\ x-2y+z-3=0 \end{cases}$