PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\lambda z & = & \lambda^2 \\ y-z & = & \lambda \\ x+\lambda y+z & = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right)$

$rg(A) \geqslant 2$ ya que tiene un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$det(A) = 1 - 1 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Para estudiar el rango de A^* calculamos el menor de A^* obtenido ampliando el menor de orden 2 no nulo de A con la columna de términos independientes y vemos cuándo se anula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda - \lambda^2 - \lambda^2 = -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$$

Caso $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. En este caso $rg(A^*) = 3$, luego el sistema es no homogéneo e incompatible.

Caso $\lambda = 0$. $rg(A^*) = 2$ y el sistema es homogéneo, compatible indeterminado.

Caso $\lambda = 1$. $rg(A^*) = 2$ y el sistema es no homogéneo, compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando x e y en función de z.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & +y & = & \lambda^2 - \lambda z \\ & y & = & \lambda + \lambda z \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x = \lambda^2 - \lambda - 2\lambda z \\ y = \lambda + \lambda z \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda^2 - \lambda - 2\lambda\mu \\ y = \lambda + \lambda\mu \quad (\mu \in \mathbf{R}) \\ z = \mu \end{array}\right.$

c) Para $\lambda = 2$ el sistema es incompatible, luego los tres planos no tienen ningún punto en común. Como, además, ninguna ecuación es múltiplo de otra, no hay dos planos que sean paralelos entre sí.

   $\boxed{\text{Solución}}$ Cada dos planos se cortan en una recta diferente.