PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)dx = 1$.

a) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow x = \left\{ \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \right.$$

Sustituimos en la derivada segunda las soluciones obtenidas:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$$

$f''(-1) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = -1$

$f''(1) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = 1$

Calculamos las ordenadas de los puntos sustituyendo en f:

$$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = \frac{-1}{2}; x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1}{2};$$

Solución: f tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, \frac{-1}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$.

b) Calculamos el valor de la integral definida:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^a = \frac{1}{2}\ln(a^2+1)$$

Resolvemos la ecuación pedida:

$$\int_0^a f(x)dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(a^2+1) = 1 \Rightarrow \ln(a^2+1) = 2 \Rightarrow a^2+1 = e^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{e^2-1}$$

Como se pide $a > 0$, debe ser $a = \sqrt{e^2-1} = 2.528$

Solución: $a = 2.528$