

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro  $a$ .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para  $a = -1$ .
- (1 punto) Resolver el sistema para  $a = 2$ .

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son  $A|A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array} \right)$

$\text{rg}(A) \geq 2$  ya que tiene un menor de orden 2 no nulo:  $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Estudiamos cuándo puede ser  $\text{rg}(A) = 3$  resolviendo la ecuación  $\det(A) = 0$

$$\det(A) = a - 2 + 2 + a^2 = a^2 + a = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Caso  $a \neq 0$  y  $a \neq -1$ . En este caso  $\text{rg}(A) = 3$ , luego también  $\text{rg}(A^*) = 3$ , así que el sistema es no homogéneo, compatible determinado.

Caso  $a = 0$ . En este caso  $\text{rg}(A) = 2$  y vemos si el menor de orden 2 de  $A$  se puede ampliar usando la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

En este caso el sistema es no homogéneo e incompatible.

Caso  $a = -1$ . En este caso  $\text{rg}(A) = 2$  y vemos si el menor de orden 2 de  $A$  se puede ampliar usando la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

En este caso el sistema es no homogéneo, compatible indeterminado

b) Para  $a = -1$  el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando  $y$  y  $z$  en función de  $x$ .

$$\begin{cases} -y & = & -x + 2 \\ y + 2z & = & x \end{cases} \left| \begin{array}{l} y = x - 2 \\ 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Solución}} \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

c) Para  $a = 2$  el sistema es de Cramer y  $\det(A) = 2^2 + 2 = 6$ ; lo resolvemos usando la regla de Cramer.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 4 = 6 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 8 = -6 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 2 + 2 = -3 \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\det(A)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Solución}} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$