Trigonometría

1. Identidades trigonométricas

Repaso de segundo

Paso de unas unidades a otras. Calculadora

Definiciones y líneas de las razones trigonométricas

Memorizar las r.t. de $0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°$

Dada una razón, calcular las demás (relación pitagórica y derivadas)

Ángulos complementarios, suplementarios, que se dif. en π, opuestos

Definición

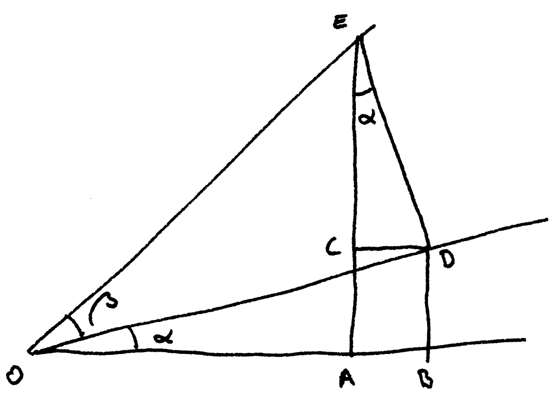
Identidad trigonométrica es una relación tautológica entre varias razones trigonométricas de uno o más ángulos. [Ejemplos]

Ejercicios sencillos

Salir de un miembro y llegar a otro

Hacer $\operatorname{sen}^2\alpha = p$ (p. ej.) y llegar a una identidad en p

Seno y coseno de una suma



$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{AE}{OE} = \frac{BD + CE}{OE} =$$

$$= \frac{OD \operatorname{sen}\alpha + ED \cos\alpha}{OE} = \frac{OE \cos\beta \operatorname{sen}\alpha + OE \operatorname{sen}\beta \cos\alpha}{OE} =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$OA = OB - CD$$

Ejemplos

Consecuencias

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha-\beta)$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$

Ejercicios

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)$

$\cos(\alpha+\beta-\gamma)$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$

Razones del ángulo doble

$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \ldots = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha =$

$\operatorname{tg} 2\alpha =$

Ejemplo

Problema típico

Es muy común tener que expresar todas las r.t. que aparezcan en función de una sola.

Por ejemplo: si $\cos\alpha = p$, escribir $\operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-p^2$

Razones del ángulo mitad

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} \cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \\ 1 &= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sumando: } \ldots \\ \text{Restando: } \ldots \end{array}\right.$$

Ejemplos

Ejemplo

Si $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ¿cuánto vale $\cos x$?

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \text{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Transformación de sumas en productos.

1. $\text{sen}\, p \pm \text{sen}\, q$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ \text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta \\ \text{sen}(\alpha+\beta) - \text{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta \Rightarrow q \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2} \wedge \beta = \frac{p-q}{2}$$

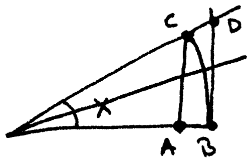
$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2} \end{array}$$

2. $\cos p \pm \cos q$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta) = \cdots \\ \cos(\alpha-\beta) = \cdots\end{array}\right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = 2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}\end{array}\right.$$

Ejemplos

<u>Derivada de $y = \text{sen}\,x$</u>



$\overline{AC} = \text{sen}\,x \quad ; \quad \overset{\frown}{CB} = x \quad ; \quad \overline{BD} = \text{tg}\,x$

$$\text{sen}\,x < x < \text{tg}\,x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\text{sen}\,x} < \frac{\text{tg}\,x}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}\,x} \leq \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen}\,x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

$$(\text{sen}\,x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\,x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\text{sen}\,\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

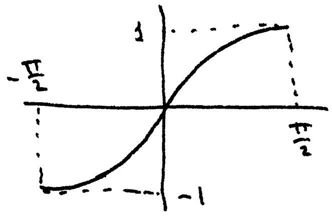
2. Ecuaciones trigonométricas

Definición

Ecuaciones trig. son aquellas en las que lo que se conoce de las incógnitas son relaciones entre ella y sus razones trigonométricas. Ej.

Funciones circulares inversas (funciones arco)

Arc sen)

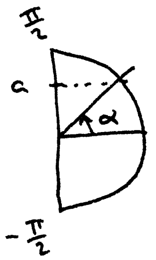


$\forall a \in [-1,1]$ se define arcsen a como el único ángulo

$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\operatorname{sen} \alpha = a$

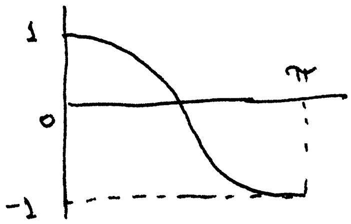
↑

Investigado con la calculadora

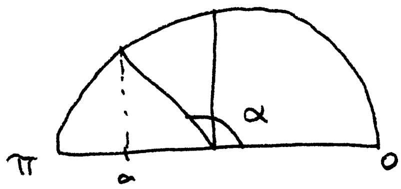


$\boxed{\text{Calculadora}}$

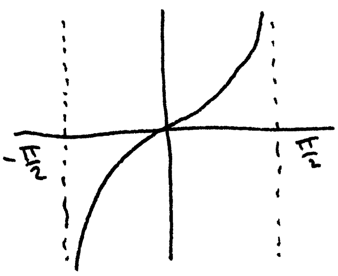
Arc cos)



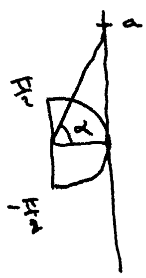
$\forall a \in [-1,1]$ ....



Arc tg)



$\forall a \in \mathbb{R}$ ....



Ecuaciones trigonométricas fundamentales

1. $\operatorname{sen} x = m$; $\alpha = \operatorname{arcsen} m$; $x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

2. $\cos x = n$; $\alpha = \operatorname{arc\,cos} n$; $x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ -\alpha + 2k\pi \end{cases} = 2k\pi \pm \alpha$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

3. $\operatorname{tg} x = p$; $\alpha = \operatorname{arctg} p$; $x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \alpha + \pi + 2k\pi \end{cases} = \alpha + k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Ecuaciones con una incógnita

Para resolverlas hay que transformarlas en ec. trig. fund., lo que se consigue escribiendo todas las razones que aparezcan en función de una sola.

Ejemplos

Sistemas

3. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo es averiguar las medidas de sus tres ángulos y las longitudes de sus tres lados

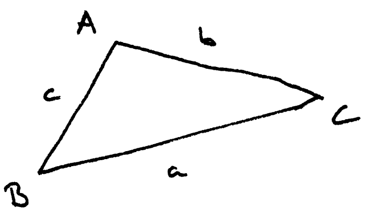
Para resolver un triángulo basta conocer 3 datos que sean independientes, es decir, que no pueda ser expresado uno de ellos en función de los otros dos.

Un triángulo puede ser resuelto gráficamente si y sólo si se puede resolver analíticamente

En todo triángulo cualquier lado es menor que la suma de los otros dos

" " " a lado mayor se opone ángulo mayor

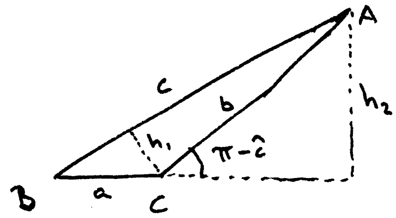
Notación



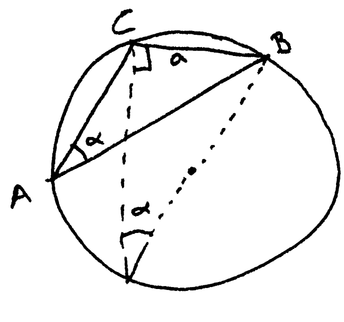
Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R,$$ donde R es el radio de la circunf. circunscrita

Demostración



$$\left.\begin{aligned} h_1 &= b\operatorname{sen}\hat{A} = a\operatorname{sen}\hat{B} \\ h_2 &= c\operatorname{sen}\hat{B} = b\operatorname{sen}(\pi-\hat{C}) = b\operatorname{sen}\hat{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dots$$



$$\hat{A} = \alpha = \frac{\widehat{CB}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R} = \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$$

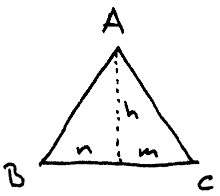
Teorema del coseno

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

Demostración

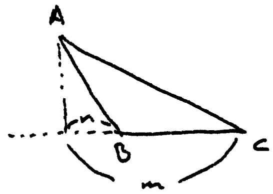
Si $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$, queda demostrado por el tma. de Pitágoras

$\hat{B} < \frac{\pi}{2}$



$$b^2 = h^2 + m^2$$

$\hat{B} > \frac{\pi}{2}$



$h = c\,\text{sen}\,\hat{B}$

$m = a - n = a - c\cos\hat{B}$

$h = c\,\text{sen}(\pi - \hat{B}) = c\,\text{sen}\,\hat{B}$

$m = a + n = a + c\cos(\pi - \hat{B}) = a - c\cos\hat{B}$

$$b^2 = (c\,\text{sen}\,\hat{B})^2 + (a - c\cos\hat{B})^2 = \dots = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

Teorema de las tangentes

Sean e y f dos lados cualesquiera de un triángulo y $\hat{E}$ y $\hat{F}$ sus ángulos opuestos. Entonces $\dfrac{e+f}{e-f} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}}$

Demostración

$$\frac{e}{\text{sen}\,\hat{E}} = \frac{f}{\text{sen}\,\hat{F}} \Rightarrow \frac{e+f}{\text{sen}\,\hat{E} + \text{sen}\,\hat{F}} = \frac{e-f}{\text{sen}\,\hat{E} - \text{sen}\,\hat{F}} \Rightarrow \frac{e+f}{e-f} = \frac{\text{sen}\,\hat{E} + \text{sen}\,\hat{F}}{\text{sen}\,\hat{E} - \text{sen}\,\hat{F}} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}\cos\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}}{2\cos\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}\,\text{sen}\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}}$$

Resolución de triángulos

Caso I — Un lado y dos ángulos  ALA

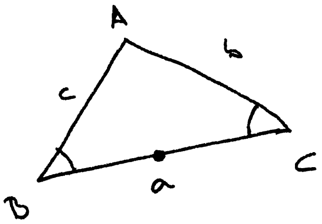
Caso II — Dos lados y el ángulo comprendido  LAL

Caso III — Los tres lados  LLL

Caso IV — Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos  LLA

[Hay varios caminos en cada caso]

Caso I ALA



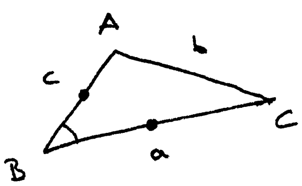
Datos : $a, \hat{B}, \hat{C}$

Incógnitas : $b, c, \hat{A}$

$$\hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow b = \frac{a \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} \quad \wedge \quad c = \frac{a \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}$$

Caso II LAL



Datos : $a, c, \hat{B}$

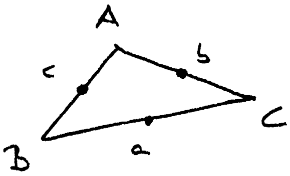
Incógnitas : $b, \hat{A}, \hat{C}$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos\hat{B}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}} \quad \wedge \quad \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\hat{A}-\hat{C}}{2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{a-c}{a+c} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}\right)\right) \\ \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A} = (+) \quad ; \quad \hat{C} = (-)$$

Caso III LLL



Datos : a, b, c Incógnitas : $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

α) Resolución gráfica

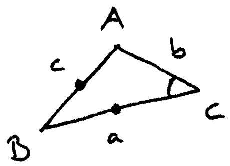
Cada lado debe ser menor menor que la suma de los otros dos

β) Resolución analítica

Dos por el tma. del coseno y el otro restando

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} < 1 \overset{\text{Desarrollando}}{\Rightarrow} a < b+c$$

Caso IV LLA

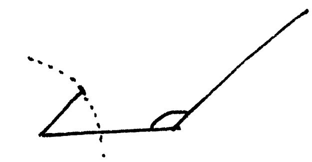


Datos : $a, c, \hat{C}$; Incógnitas : $b, \hat{A}, \hat{B}$

α) Resolución gráfica

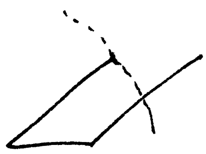
1. $\hat{C} \geq \frac{\pi}{2}$

a) $c \leq a$



No hay solución

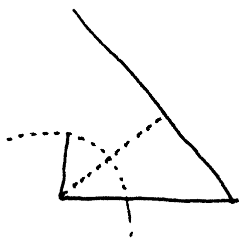
b) $c > a$



Una solución

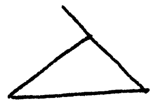
2. $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$

a) $c < a \operatorname{sen}\hat{C}$



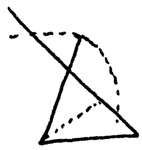
No hay solución

b) $c = a \operatorname{sen} \hat{C}$



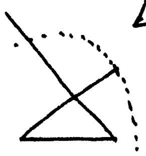
Una solución $(\hat{A} = \frac{\pi}{2})$

c) $a \operatorname{sen} \hat{C} < c < a$



Dos solucions $(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \pi)$
(dem.)

d) $c \geq a$



Una solución

β) Resolución analítica

Si suponemos calculada $\hat{A}$, se puede terminar así:

$\hat{B} = \pi - (\hat{A} + \hat{C})$, $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}}$.

Así pues, hay que calcular $\hat{A}$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c}; \quad \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c} = 1 \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c} < 1 \Rightarrow \hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 & \text{agudo} \\ \hat{A}_2 & \text{obtuso} \end{cases}$$

1. $\hat{C} \geq \frac{\pi}{2}$

a) $c \leq a \Rightarrow \hat{C} \leq \hat{A} \Rightarrow \hat{A} \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} \geq \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$, contr., luego no hay sol.

b) $c > a \Rightarrow c > a \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow 1 > \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_1$

No puede ser $\hat{A} = \hat{A}_2 > \frac{\pi}{2}$ porque sería $\hat{A} + \hat{C} > \pi$

$\Big\} \rightarrow$ Una sol.

2. $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$

a) $c < a \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow 1 < \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} > 1$, contr., no hay sol.

b) $c = a \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$, una sol.

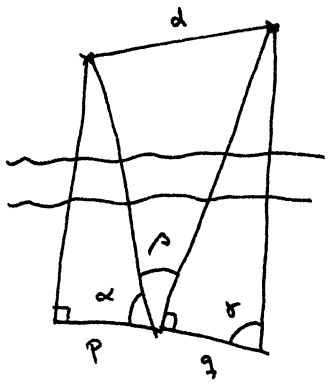
c) $a > c > a \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \wedge 1 > \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c} \Rightarrow \hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \end{cases}$ dos sol.

d) $a \leq c \Rightarrow \hat{A} \leq \hat{C} \wedge a \operatorname{sen} \hat{C} < c \Rightarrow \hat{A} \leq \hat{C} \wedge \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c} < 1 \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_1$, una sol.

Ejemplos

Todos se basan en calcular $\hat{A}$ por el teorema del seno y elegir $\hat{A}_1$ o $\hat{A}_2$ según "a lado mayor se opone ángulo mayor"

Distancia entre dos puntos inaccesibles



$$m = \frac{p}{\cos\alpha} \quad ; \quad n = q \operatorname{tg}\alpha$$

$$d = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\beta}$$

TR - P

Identidades sencillas

$$\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\cos\alpha \cdot \sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$$

$$(\sec^2\alpha - 1)\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\frac{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$$

$$\frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg} - 1}$$

$$\frac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha} \cdot \frac{1}{\sec^2\alpha}$$

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$$

TR – P

Identidades interesantes

$$\operatorname{sen}\beta \cos(\alpha-\beta) + \cos\beta \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$$

$$2 - \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} + 3\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 0$$

$$\cos^6\alpha + \operatorname{sen}^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2\alpha$$

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$$

$$2(\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha)^2 = \operatorname{sen}^8\alpha + \cos^8\alpha + 1$$

$$\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\operatorname{sen}^2\alpha(1+\cos\alpha)$$

$$\frac{1-\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{tg}2x}{1+\sec 2x} - \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cos y} = \operatorname{tg}y$$

$$\left(\frac{1}{\cos x-\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x+\cos^2 x}\right)\frac{1}{\sec^2 x} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x} - \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}\right)\operatorname{ctg}2x =$$

Identidades en triángulos

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = 4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$$

$$a = b \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}(\hat{A}+\hat{C})}$$

Fórmulas de Mollweide

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \quad ; \quad \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$\widehat{ABC}$ rectángulo $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sen}^2\hat{A} = \operatorname{sen}^2\hat{B} + \operatorname{sen}^2\hat{C}$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\gamma = 0$$

$$\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma}{2\cos\alpha}$$

(TR – P)

Ecuaciones trigonométricas

$2\,\text{sen}\,x = 2 - \cos^2 \alpha$

$2\,\text{sen}\,\frac{x}{2} + \cos x = \frac{3}{2}$

$6\,\text{sen}\,x\,\text{tg}\,x = \text{sen}\,2x$

$3\sec x + 4\,\text{cosec}\,x = 10\,\text{cosec}\,2x$

$2\,\text{sen}\,x + 3\cos x = 2$

$\text{sen}^2 2x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

$2\,\text{tg}\,x + \sec^2 x = 2$

$\frac{1}{\cos x} = \text{sen}\,x + \cos x$

$3\,\text{tg}^2 x = 2\sec x + 1$

$1 + \cos x + \cos 2x = 0$

$\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x = \cos x - \cos 3x$

$3\,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha + \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x = \cos x + \cos 3x$ (divide por $\cos^3 x$)

$\text{tg}\,2x = 3\,\text{tg}\,x$

$\text{sen}\,x + \text{cosec}\,x = \frac{5}{2}$

$2\cos 2x + \text{sen}\,x = 2$

$5\sec x - 4\cos x = 8$

$\text{sen}\,x = \cos x$

$4\,\text{sen}\,x - \cos x = 2$

$\cos x - \frac{2\,\text{tg}\,x}{1+\text{tg}^2 x} = 0$

$\text{tg}\,x = 2\sec^2 x - 5$

$\cos 2x + \text{sen}\,x = 0$

$\frac{\text{tg}\,2x}{\text{sen}\,x} + 2 = 0$

$\cos 4x - \text{sen}\,2x = 0$

Tercero de B.U.P.

Examen de segunda evaluación (para elevar calificación)

Fecha: X.21.12.1983

Tema: "Trigonometría y sus aplicaciones".

1. Demostrar que $\dfrac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{3\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}3\alpha} = \operatorname{ctg}^3\alpha$

2. Disponiendo de un teodolito y un medidor de distancias, diseñar un método para calcular la distancia entre dos puntos de la ladera de una montaña inaccesible (ver figura 1).

3. Lo mismo que el problema anterior para calcular la superficie de un triángulo definido por tres puntos inaccesibles. (ver figura 2).

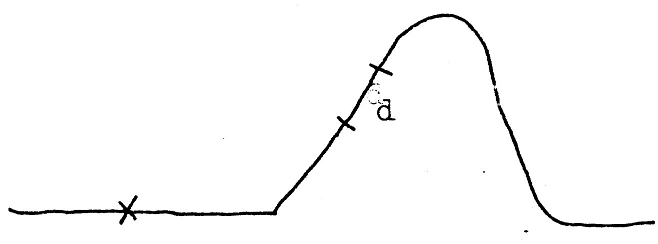


figura 1

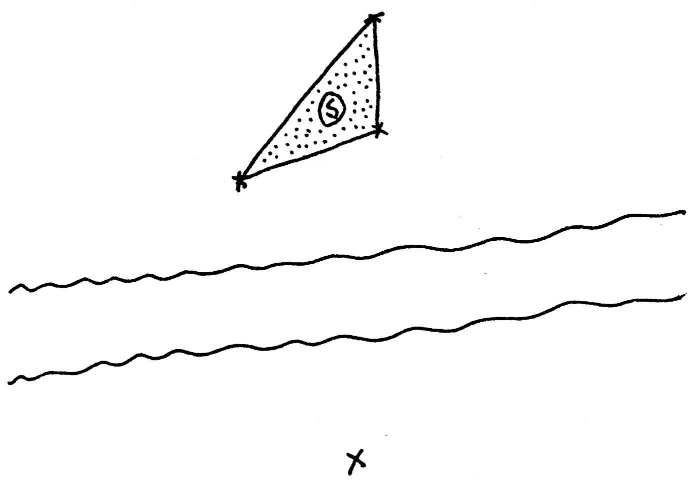


figura 2

Tercero B

Fecha: V. 13.12.1985

Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

1. Teorema del coseno

2. Demostrar que $2 - \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} + 3\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

3. Resolver la ecuación $4\cos x = 1 + 4\cos^2 x$

4. De un triángulo $\widehat{ABC}$ se sabe que $a = 3$, $\hat{B} = 50^\circ$, $\hat{C} = 70^\circ$.

   Resolverlo y calcular su área

Para subir calificación

1. Si $\mathrm{sen}\,x = p$, ¿cuánto vale $\mathrm{sen}\,4x$?

2. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Demostrar que $\mathrm{tg}\,\hat{A} + \mathrm{tg}\,\hat{B} + \mathrm{tg}\,\hat{C} = \mathrm{tg}\,\hat{A} \cdot \mathrm{tg}\,\hat{B} \cdot \mathrm{tg}\,\hat{C}$

Tercero C

Fecha: V. 13.12.1985 Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

1. Teorema del coseno

2. Demostrar que $2\,\text{sen}^2 \frac{3\alpha}{2} = 1 - \cos^3\alpha + \text{sen}^2\alpha \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\, 2\alpha$

3. Resolver la ecuación $4\cos(x-2) = 1 + 4\cos^2(x-2)$

4. De un triángulo $\widehat{ABC}$ se sabe que $a = 5$, $\hat{B} = 65°$, $\hat{C} = 40°$.

   Resolverlo y calcular su área.

Para subir calificación

1. Si $\cos x = p$, ¿cuánto vale $\cos 4x$?

2. Encontrar todas las soluciones de $\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x = 0$

Fecha: V. 23. 10. 1987 ; Tiempo: 1 hora

1. Usando las fórmulas del ángulo mitad y del ángulo triple, calcular con 6 decimales $\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}$, sabiendo que $\cos\alpha = -0.6$ y $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

2. Demostrar la identidad $\dfrac{1-\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

3. Resolver la ecuación $\cos x - \dfrac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 0$

4. Encontrar todos los ángulos $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ que verifican

$$3\operatorname{sen}4x + 2\operatorname{tg}x = 5.12$$

[Dos puntos y medio cada pregunta]

Fecha: V. 23. 10. 1987 ; Tiempo: 1 hora

1. Usando las fórmulas del ángulo mitad, calcular con seis decimales $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4}$, sabiendo que $\cos\alpha = 0.4$ y $\alpha \in (\pi, 2\pi)$

2. Demostrar la identidad $\dfrac{\operatorname{tg}2x}{1+\sec 2x} - \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y} = \operatorname{tg} y$

3. Resolver la ecuación $\dfrac{1}{\cos x} = \operatorname{sen}x + \cos x$

4. Encontrar todos los ángulos $x \in [0, 2\pi]$ que verifican

$$2\operatorname{sen}(5x) + 3\cos(3x) = -5.09$$

[Dos puntos y medio cada pregunta]

Matemáticas   Tercero de B.U.P.   Curso 1991-92

Hoja de problemas para rec. ***Parte A : Trigonometría*** **Fecha: L.16.12.1991**

Demuestra las identidades:

[1] $ctg^2a = \dfrac{\cos^2 a}{\cos^2 a - \cos^4 a} \cdot \dfrac{1}{\sec^2 a}$ [2] $\dfrac{sen a}{2\cos^2(a/2)} - \dfrac{1-\cos a}{sen a} = 0$

[3] $[\ sen(3a/2) + sen(a/2)\ ]^2 = 2(sen^2a)(1+\cos a)$

[4] $a + b + c = 180^\circ \Rightarrow tg(a+b) + tgc = 0$

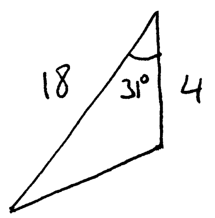
Resuelve las ecuaciones:

[1] $(5/3)sen5x=-0.14$ [2] $tg(x/3)=4.5$ [3] $3ctg^2 2x=1$ [4] $tgx=2\sec^2x-5$

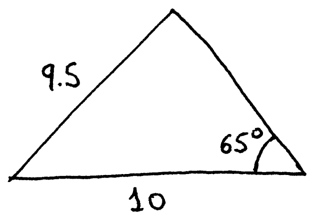
[5] $\cos 4x - sen2x = 0$ [6] $4senx - \cos x = 2$ [7] $2\cos 2x + senx = 2$

Resuelve los triángulos:

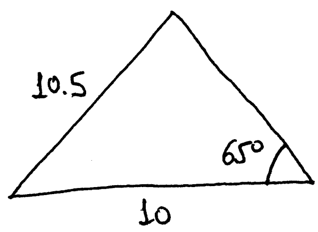
[1]



[2]



[3]



Matemáticas Tercero de B.U.P. Curso 1991-92

Resolución de problemas de rec. *Parte A : Trigonometría* **Fecha: J.9.1.1992**

Identidades

(1)
$$\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a - \cos^4 a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a(1-\cos^2 a)} \cdot \cos^2 a = \frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \operatorname{ctg}^2 a$$

(2)
$$\frac{\operatorname{sen} a}{2\cos^2 \frac{a}{2}} - \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} a}{2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)^2} - \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a} - \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 a - (1+\cos a)(1-\cos a)}{(1+\cos a)\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}^2 - 1 + \cos^2 a}{(1+\cos a)\operatorname{sen} a} = \frac{0}{(1+\cos a)\operatorname{sen} a} = 0$$

(3)
$$\left(\operatorname{sen}\frac{3a}{2} + \operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)^2 = \left(2\operatorname{sen}\frac{\frac{3a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\cos\frac{\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}}{2}\right)^2 = \left(2\operatorname{sen} a \cos\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= 4\operatorname{sen}^2 a\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2 a\,\frac{1+\cos a}{2} = 2\operatorname{sen}^2 a(1+\cos a)$$

(4)
$$a+b+c = 180^\circ \Rightarrow a+b = 180^\circ - c$$

$$\operatorname{tg}(a+b) + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg}(180^\circ - c) + \operatorname{tg} c = -\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c = 0$$

Matemáticas **Tercero de B.U.P.** **Curso 1991-92**

Resolución de problemas de rec. ***Parte A : Trigonometría*** **Fecha: J.9.1.1992**

Ecuaciones

① $\frac{5}{3}\operatorname{sen}5x = -0.14 \Rightarrow \operatorname{sen}5x = \frac{-3\cdot 0.14}{5} \Rightarrow 5x = \begin{cases} -4.82^\circ + K\,360^\circ \\ 184.82^\circ + K\,360^\circ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} -0^\circ\ 57'\ 49'' + K\cdot 72^\circ \\ 36^\circ\ 57'\ 49'' + K\,72^\circ \end{cases}$

② $tg\,\frac{x}{3} = 4.5 \Rightarrow \frac{x}{3} = 77.47^\circ + K\,180^\circ \Rightarrow x = 232^\circ\ 24'\ 49'' + K\cdot 540^\circ$

③ $3ctg^2 2x = 1 \Rightarrow ctg^2 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow tg^2 2x = 3 \Rightarrow tg\,2x = \begin{cases} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 60^\circ + K180^\circ \\ -60^\circ + K\,180^\circ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + K\cdot 90^\circ \\ -30^\circ + K\cdot 90^\circ \end{cases}$

④ $tg\,x = 2\sec^2 x - 5 \Rightarrow tg\,x = 2(1 + tg^2 x) - 5 \xRightarrow{tg\,x = p} p = 2(1+p^2) - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 2 + 2p^2 - 5 \Rightarrow 2p^2 - p - 3 = 0 \Rightarrow p = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \begin{cases} 1.5 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow tg\,x = \begin{cases} 1.5 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 56^\circ\ 18'\ 36'' + K\,180^\circ \\ -45^\circ\ 0'\ 0'' + K\,180^\circ \end{cases}$

⑤ $\cos 4x - \operatorname{sen}2x = 0 \Rightarrow \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}2x = 0 \xRightarrow{\operatorname{sen}2x = p} 1 - p^2 - p^2 - p = 0 \Rightarrow 2p^2 + p - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ 0.5 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}2x = \begin{cases} -1 \\ 0.5 \end{cases} \Rightarrow 2x = \begin{cases} -90^\circ + K\,360^\circ \\ 30^\circ + K\,360^\circ \\ 150^\circ + K\,360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -45^\circ + K\,180^\circ \\ 15^\circ + K\,180^\circ \\ 75^\circ + K\,180^\circ \end{cases} = 15^\circ + K60^\circ$

⑥ $4\operatorname{sen}x - \cos x = 2 \xRightarrow{tg\frac{x}{2} = t} 4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \Rightarrow 8t - 1 + t^2 = 2 + 2t^2 \Rightarrow t^2 - 8t + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 4 \pm \sqrt{16-3} = \begin{cases} 4+\sqrt{13} \\ 4-\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow tg\,\frac{x}{2} = \begin{cases} 4+\sqrt{13} \\ 4-\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} 82.51^\circ + K180^\circ \\ 21.53^\circ + K180^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 165^\circ\ 1'\ 9'' + K360^\circ \\ 43^\circ\ 3'\ 12'' + K360^\circ \end{cases}$

⑦ $2\cos 2x + \operatorname{sen}x = 2 \Rightarrow 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen}x = 2 \xRightarrow{\operatorname{sen}x = p} 2(1 - p^2 - p^2) + p = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 4p^2 + p = 2 \Rightarrow 4p^2 - p = 0 \Rightarrow p = \begin{cases} 0 \\ 0.25 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \begin{cases} 0 \\ 0.25 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} K\,360^\circ \\ 180^\circ + K\,360^\circ \\ 14^\circ\ 28'\ 39'' + K\,360^\circ \\ 165^\circ\ 31'\ 21'' + K\,360^\circ \end{cases} \Rightarrow$

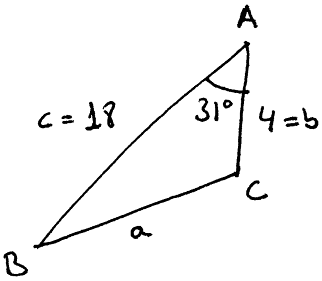
$\Rightarrow x = \begin{cases} K\,180^\circ \\ 14^\circ\ 28'\ 39'' + K\,360^\circ \\ 165^\circ\ 31'\ 21'' + K\,360^\circ \end{cases}$

Matemáticas **Tercero de B.U.P.** **Curso 1991-92**

Resolución de problemas de rec. ***Parte A : Trigonometría*** **Fecha: J.9.1.1992**

Triángulos

(1)



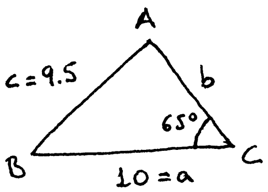
$$a = \sqrt{4^2 + 18^2 - 2\cdot 4\cdot 18\cdot \cos 31^\circ} = 14.72$$

$$\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - 31^\circ}{2} = 74.5^\circ$$

$$\frac{c+b}{c-b} = \frac{tg\,\frac{\hat{C}+\hat{B}}{2}}{tg\,\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}} \Rightarrow \frac{22}{14} = \frac{tg\,74.5^\circ}{tg\,\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}} \Rightarrow tg\,\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2} = \frac{14\,tg\,74.5^\circ}{22} \Rightarrow \hat{C}-\hat{B} = 66.45^\circ$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\hat{C}+\hat{B}}{2} &= 74.5^\circ\\ \frac{\hat{C}-\hat{B}}{2} &= 66.45^\circ\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\hat{B} &= 8^\circ\ 2'\ 51''\\ \hat{C} &= 140^\circ\ 57'\ 9''\end{aligned}\right.$$

(2)



$$\frac{10}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{9.5}{\operatorname{sen}65^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{10\operatorname{sen}65^\circ}{9.5} \Rightarrow \hat{A} = \left\{\begin{aligned}&72^\circ\ 33'\ 20''\\ &107^\circ\ 26'\ 40''\end{aligned}\right.$$

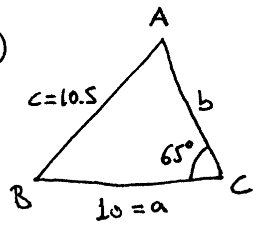
$10 > 9.5 \Rightarrow a > c \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow \hat{A} > 65^\circ \Rightarrow$ Hay dos soluciones:

$$\hat{A}_1 = 72^\circ\ 33'\ 20'' \quad ; \quad \hat{A}_2 = 107^\circ\ 26'\ 40''$$

$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (65^\circ + 72^\circ\ 33'\ 20'') = 42^\circ\ 26'\ 40'' \quad ; \quad \hat{B}_2 = 180^\circ - (65^\circ + 107^\circ\ 26'\ 40'') = 7^\circ\ 33'\ 20''$$

$$b_1 = \sqrt{10^2 + 9.5^2 - 2\cdot 10\cdot 9.5\cos 42^\circ 26' 40''} = 7.07 \quad ; \quad b_2 = \sqrt{10^2 + 9.5^2 - 2\cdot 10\cdot 9.5\cos 7^\circ 33' 40''} = 1.38$$

(3)



$$\frac{10}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{10.5}{\operatorname{sen}65^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{10\operatorname{sen}65^\circ}{10.5} \Rightarrow \hat{A} = \left\{\begin{aligned}&59^\circ\ 40'\ 20''\\ &120^\circ\ 19'\ 40''\end{aligned}\right.$$

$10 < 10.5 \Rightarrow a < c \Rightarrow \hat{A} < \hat{C} \Rightarrow \hat{A} < 65^\circ \Rightarrow$ Hay sólo una solución.

$$\hat{A} = 59^\circ\ 40'\ 20''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (65^\circ + 59^\circ\ 40'\ 20'') = 55^\circ\ 19'\ 40''$$

$$b = \sqrt{10^2 + 10.5^2 - 2\cdot 10\cdot 10.5\cos 55^\circ 19' 40''} = 9.53$$