Cálculo diferencial

1. Crecimiento y convexidad

Recordatorios

Intervalos

Operaciones con funciones

Definición de límite finito

Def. de función cont. en un punto

Def. $f'(x)$

Deriv. $\Rightarrow$ cont. ($\not\Leftarrow$)

Intervalos centrados

$x_0, \varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon > 0$

Intervalo de centro x_0 y radio ε : $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

[Llamarle entorno de x_0, si hace falta]

Definiciones sobre crecimiento

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$

1. f tiene un mx. rel. en x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists\, \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

2. mn $\quad >$

3. Si f tiene un mx. o mn. rel. en x_0, se dice que tiene un extremo rel.

4. f creciente en x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists\, \delta > 0 \mid \begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$

5. decreciente

Proposición

Sea $G \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $h_0 \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{h \to h_0} G(h) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid h \in (h_0 - \delta, h_0 + \delta) - \{h_0\} \Rightarrow G(h) > 0$

2. $\qquad\qquad < \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad <$

Demostración

1. $L > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid h \in (h_0 - \delta, h_0 + \delta) \Rightarrow G(h) \in (L - L, L + L) = (0, 2L) \Rightarrow G(h) > 0$

2. $-L > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid h \in (h_0 - \delta, h_0 + \delta) \Rightarrow G(h) \in (L - (-L), L + (-L)) = (2L, 0) \Rightarrow G(h) < 0$

Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$

1. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ creciente en x_0
2. $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en x_0

Demostración 1

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid h \in (-\delta, \delta) - \{0\} \Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Llamamos $x = x_0 + h$, con lo que $h = x - x_0$

$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow x - x_0 = h \in (-\delta, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} h < 0 \\ \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow f(x_0) < f(x)$

Ejemplos

a) Est. el crec. de una función en un punto

b) Decir los int. de crec. y decrec. de una función (e.d.:

estudiar el crec. de una función)

[Calculando las raices de f' – y los puntos de no derivabilidad – y

calculando f' en algún punto de cada intervalo]

Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$

Si f tiene un extremo relativo en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$

Demostración

$$f \text{ tiene un extremo rel} \overset{\text{en } x_0}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ no es creciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \\ f \text{ no es decreciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable y $x_0 \in \mathbb{R} \mid f'(x_0) = 0$

1. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un mx. rel. en x_0
2. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mn. rel. en x_0

Demostración 1

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow (f')'(x_0) < 0 \Rightarrow f'$ decreciente en $x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid \begin{cases} x \in (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow \\ x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ \Rightarrow f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente en } x \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Luego $\exists\, \delta > 0 \mid x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, así que

f tiene un máx. rel. en x_0

Ejemplos

Calcular máx. y mín. rel. de funciones: polinomios, exponenciales, logaritmos

Resumen est. del crec. de una f. en un punto

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable, $x_0 \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ crec. en x_0

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene mín. rel en } x_0 \\ f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{puede ocurrir cualquier caso} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máx. rel. en } x_0 \end{cases}$$

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en x_0

Definiciones sobre convexidad

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ y $TG(x)$ la tangente a la curva en x_0

[Como f es derivable, TG no es vertical]

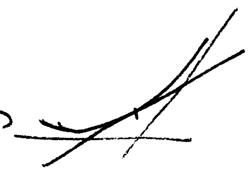
1. f convexa en $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > TG(x)$
2. f cóncava en $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) < TG(x)$
3. f tiene un punto de inflexión en $x_0 \Leftrightarrow f$ es cóncava a la izq. de x_0 y convexa a la derecha o viceversa

Teorema

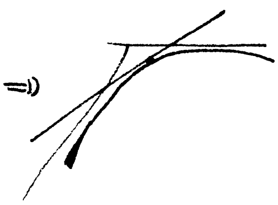
Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ s.d. en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en x_0
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es convexa en x_0
3. f tiene un p.i. en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$
4. $f''(x_0) = 0 \neq f'''(x_0) \Rightarrow f$ tiene un p.i. en x_0

Justificación

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow (f')'(x_0) > 0 \Rightarrow f'$ creciente en $x_0 \Rightarrow$  $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ cóncava en x_0

2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow (f')'(x_0) < 0 \Rightarrow f'$ decreciente en $x_0 \Rightarrow$  $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ convexa en x_0

3. f tiene p.i. en $x_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ no es cóncava en } x_0 \\ \text{'' '' '' convexa} \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(x_0) \leq 0 \\ f''(x_0) \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

4. $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f''$ crec. o decrec. en $x_0 \Rightarrow f''$ toma distinto signo a cada lado de $x_0 \Rightarrow f$ pasa de cóncava a convexa o viceversa en $x_0 \Rightarrow f$ tiene p.i. en x_0

Ejemplos

a) Est. convexidad en un punto

b) '' '' de una función

c) Calcular p.i. de funciones

2. Regla de L'Hôpital

Los límites de un cociente que sean indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ a veces pueden ser calculados derivando independientemente numerador y denominador, es decir, la expresión

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es cierta en muchas ocasiones

Ejemplos y ejercicios

a) Indeterminaciones $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ de segundo de B.U.P.

b) Cocientes

c) Productos $\rightarrow$ $a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$

d) Potencias $\rightarrow$ tomando ln.

3. Representación de funciones

Se trata de dibujar el grafo o gráfica de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Se utilizan las "pistas" que se consideran necesarias en cada caso.

Dominio

$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) \}$

Casos con fracciones, raíces, logaritmos y arcos

Simetrías

f par $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$, $Gr(f)$ simétrica resp. a OY

f impar $\Leftrightarrow$ $f(x) = -f(-x)$, $Gr(f)$ " " " O

Continuidad

Encontrar los puntos de discontinuidad de la func. y en ellos calcular los límites laterales

Puntos de corte con los ejes

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) \rightarrow (0, f(0))$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n \rightarrow (x_1, 0), \dots, (x_n, 0)$

Crecimiento y convexidad

Imprescindible calcular máx. y mín. rel. y p.i.

A veces interesante decir los int. de crec. y conv.

Asíntotas

Una recta y una curva se dice que son asíntotas cuando la distancia entre ambas tiende a 0

Verticales $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x)$ es infinito

Horizontales $y = b$ cuando $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ (por la dcha.)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ (por la izq.)

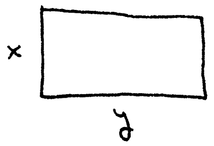
Oblicuas $y = mx + q$ con $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} f'(x)$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Si una función no tiene por un lado, ni asint. h. ni oblicua, se dice que tiene una rama parabólica por ese lado.

4. Máximos y mínimos condicionados

El problema es calcular el máximo o mínimo de una función que verifique además algunas condiciones suplementarias. Por ejemplo: "de todos los rectángulos de perímetro 4, hallar el de área máxima"; se trata de encontrar el máximo de la función "área", pero se debe verificar que "perímetro = 4". Expresándolo simbólicamente:



$S = xy$

$P = 2x + 2y$ Debe ser S máximo y $P = 4$

Como S es una función de dos variables independientes, no podemos usar los métodos que hemos estudiado, así que hay que convertir S en una función de una variable independiente usando la condición suplementaria $P = 4$

$$P = 4 \Rightarrow 2x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow S = x(2-x) = -x^2 + 2x$$

Y basta buscar el máximo de $S(x) = -x^2 + 2x$

(CB - P)

Extremos relativos y p.i.

$e^{f(x)}$

$x - \ln(x-3)$

$ax + b + \dfrac{1}{x-c}$

$\dfrac{2}{x} + \ln x$

$\operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh} x$

$\dfrac{x^2-1}{2x} - \ln x$

$\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

CD - P

Representaciones gráficas

$x^3 - 3x$, $x^3 - 9x$

$x^4 + 2x^2$

$\frac{1}{x}$

$ax + b + \frac{1}{x-c}$

$\frac{x^3}{3} - 2x^2$

Funciones con $| \ |$

$x^3 + 3x^2$

$x^3 - 6x^2$

$y = \frac{4x-5}{x^2-1}$ $y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$ (no calcular los p.i.)

$y = \frac{x^2-4}{x+1}$

Máximos y mínimos condicionados

Descomponer 5 en dos sumandos de modo que $2 \cdot 1^{o} + (2^{o})^2$ mín

" 25 " " " " " " $2 \cdot (1^{o})^2 + 3\,(2^{o})^2$ mín.

" 10 " " " " " " $4\,(1^{o}) + 2\,(2^{o})$ mín

" 10 " " " " " " $(1^{o} - 2^{o}) + (1^{o} \cdot 2^{o})$ mx.

" 18 " " " " " " $1^{o} \cdot (2^{o})^2$ mx

" 98 " " " " " " $\sqrt{1^{o}} + \sqrt{2^{o}}$ mx.

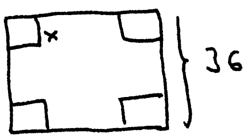
" 24 " " " " " " $1^{o} \cdot (2^{o})^3$ mx

Escribir 5 como fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ de modo que $10\,(a+b) - ab$ mx.

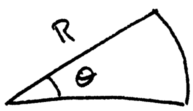
Rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia

Cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera

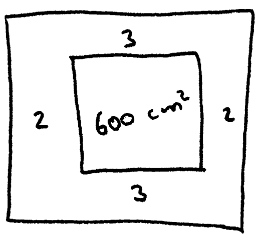
Cilindro de volumen determinado y superficie mínima



Volumen de la caja resultante, máximo



Perímetro P y área máxima



Superficie mínima

Rectángulo de superficie 9 y diagonal mínima

Una estatua de 2 m descansa sobre un pedestal de 5 m. ¿A qué distancia del eje de la estatua se ha de situar un hombre de 1.70 m para ver la estatua con mayor ángulo. [Ind.: hacer mx. tg ∡. Solución ~ 4.2 m]

(CD - P)

Máximos y mínimos condicionados

Dimensiones de un prisma recto de base cuadrada de volumen mx.

y suma de sus aristas 48

Las manillas de un reloj miden 8 y 10 cm. Sus extrem se unen

formando un triángulo. Expresar Sup (t). Hallar t_0 | $t_0 \in (12, 12{:}30)$

$\wedge$ Sup (t_0) mx.