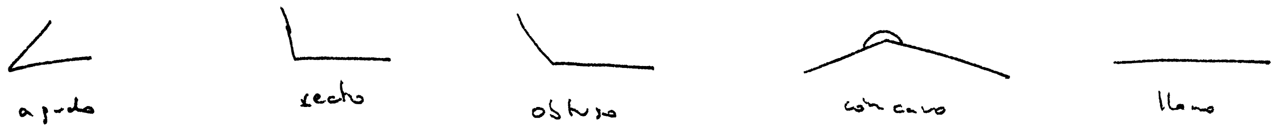
Trigonometría

1. Ángulos

Tipos de ángulo



Grados sexagesimales

Grado sexagesimal es la nonagésima parte de un ángulo recto

Minuto

Segundo

Grados centesimales

Grado

Minuto

Segundo

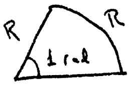
Radián

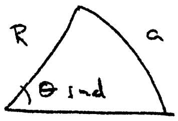
Radián es la medida del ángulo central cuyo arco mide un radio

$$\left.\begin{array}{l} R \text{ — } 1 \text{ rad.} \\ 2\pi R \text{ — } x \text{ rad} \end{array}\right| \Rightarrow x = 2\pi$$

TR2

Medida de un arco de circunferencia

Como 

, 

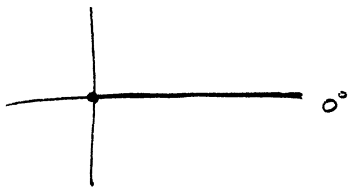
$a = R\theta$

Paso de una unidad a otra

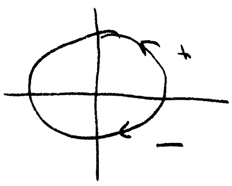
1 circunf. $= 360^\circ = 400^g = 2\pi$ rad.

Origen y signo de ángulos

Cuando colocamos un ángulo en los ejes de coordenadas para estudiarlo, lo hacemos de modo que el vértice coincida con el origen de coordenadas y un lado sea el eje positivo de abscisas, esta semirecta recibe el nombre de origen de ángulos



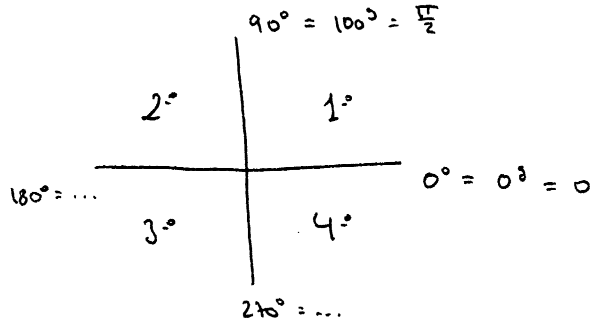
El ángulo queda definido por la posición de la otra semirecta. Si vamos del origen de ángulos a la otra semirecta en el sentido contrario a las agujas de un reloj, estamos considerando el ángulo con signo positivo, y si vamos en el sentido de las agujas del reloj, lo consideramos negativo



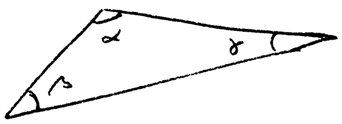
Ejemplo

(...)

Cuadrantes

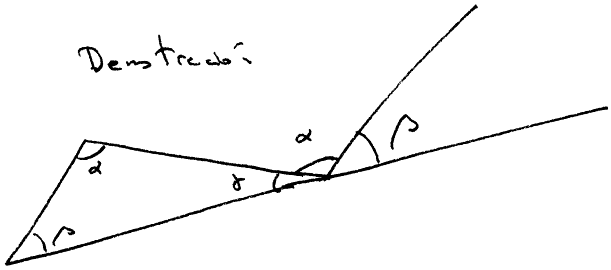


Suma de los ángulos de un triángulo



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Demostración



Clasificación de los triángulos

Por sus lados: escaleno, isósceles, equilátero

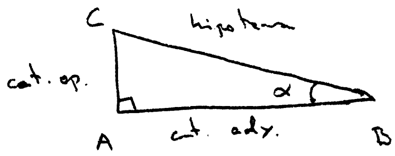
Por sus ángulos: acutángulo, rectángulo, obtusángulo

Teorema de Pitágoras

(...)

2. Razones trigonométricas

R.t. en un triángulo rectángulo



Se define

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$\cos\alpha =$

$\operatorname{tg}\alpha =$

$\sec\alpha =$

$\operatorname{cosec}\alpha =$

$\operatorname{ctg}\alpha =$

Estas definicions solo sirven para ángulos de $(0, \frac{\pi}{2})$

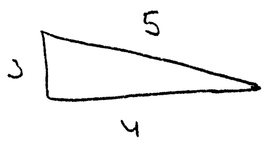
Propiedades

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Ejemplo



Observación

Los r.t. de un ángulo son iguales en cualquiera triángulos rectángulos semejantes

(...)

R.t. de ángulos notables

1. 60°

2. 30°

3. 45°

Propiedad

En todo triángulo rectángulo cada cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto y a la hipotenusa por el coseno del ángulo contiguo

Notación

$(\text{sen}\ \alpha)^2 = \text{sen}^2\ \alpha$ (etc.)

Relación pitagórica

(...)

Circunferencia trigonométrica

Es la que tiene radio 1 y el centro en el origen de coordenadas

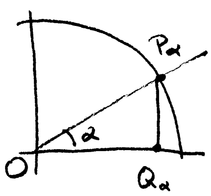
Cada ángulo α corta la circunferencia trigonométrica a un punto que llamaremos P_α.

Obsérvese que $P_\alpha = P_{\alpha+2\pi} = \cdots$

Investigación

Sólo tenemos definidas las r.t. de un ángulo cuando pertenece al primer cuadrante. Hay que intentar ampliar la definición.

Obsrvamos lo siguiente:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{P_\alpha Q_\alpha}{OP_\alpha} = \frac{P_\alpha Q_\alpha}{1} = P_\alpha Q_\alpha = \text{ordenada } (P_\alpha)$$

$$\cos\alpha = \qquad\qquad = \text{abscisa } (P_\alpha)$$

Definición

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ α es un ángulo medido en radianes. Se define

$\operatorname{sen}\alpha = \text{ordenada } (P_\alpha)$

$\cos\alpha = \text{abscisa } (P_\alpha)$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

[Calcular r.t. de $0°$, $\frac{\pi}{2}$, etc...]

Signo de las r.t.

1. sen α

+	+
−	−

2. cos α

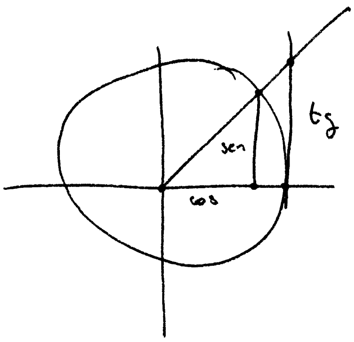
−	+
−	+

3. tg α

−	+
+	−

4. sec α, cosec α, ctg α. Como sus correspondientes

Líneas que representan las r.t.



Relación pitagórica

(...)

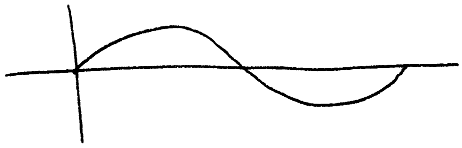
Consecuencias

1. $tg^2 \alpha + 1 = sec^2 \alpha$

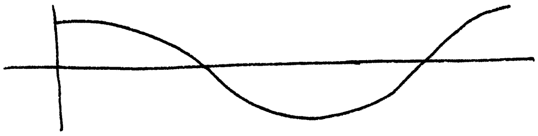
2. $1 + ctg^2 \alpha = cosec^2 \alpha$

Representación gráfica

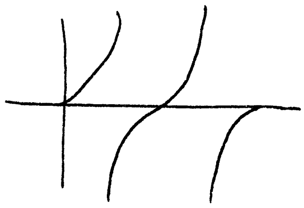
1. sen x



2. cos x



3. tg x



Dada una r.t., calcular las demás

1. Conocido sen α

   Rel. pit. y def. tg.

2. Conocido cos α

   Id.

3. Conocida tg α

   $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$

4. Conocidos sec α, cosec α o ctg α

   Reducir a casos anteriores.

3. Identidades trigonométricas

Son relaciones ciertas entre las r.t. de uno o más ángulos.

Vamos a demostrar las identidades trigonométricas que permiten calcular las r.t. de cualquier ángulo utilizando solo las de los que pertenecen al intervalo $[0°, 45°]$

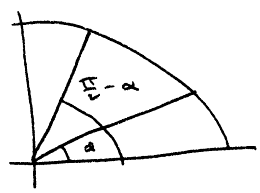
Ángulos que se diferencian en un número exacto de circunferencias

$\forall k \in \mathbb{Z} \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : P_\alpha = P_{\alpha + 2k\pi}$, luego

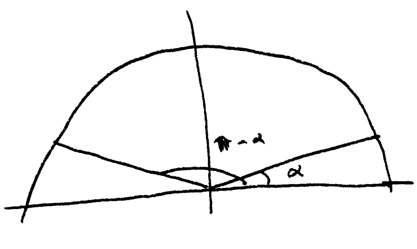
$\text{sen}\, \alpha = \text{sen}\, (\alpha + 2k\pi)$

(...)

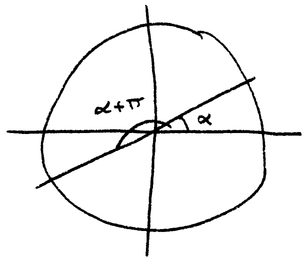
Ángulos complementarios



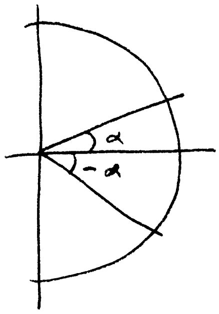
Ángulos suplementarios



Ángulos que se diferencian en π



Ángulos opuestos



Ejercicio

Ángulos que se diferencian en $\frac{\pi}{2}$

Ejercicio

Cálculo de las r.t. de un ángulo reduciéndolo a los de $[0, 45^\circ]$

4. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es hallar las longitudes de sus lados y las magnitudes de sus ángulos.

Funciones circulares inversas (funciones arco)

1. Si $a \in [-1,1]$, llamamos arcsen a a un ángulo cuyo seno sea a, es decir: $\arcsen a = \alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = a$

2. arccos

3. Si $a \in \mathbb{R}$, arctg

$\boxed{\text{Calculadora}}$

Observación

$\operatorname{sen}(\arcsen a) = a$

$\arcsen(\operatorname{sen} \alpha) = \alpha$

Son inversas una de la otra

Casos de resolución de triang. rect.

En general para resolver un triángulo es suficiente conocer 3 datos.

Si el triángulo es rectángulo, ya sabemos que un ángulo es 90°, de modo que sólo faltan dos datos.

Según cuales sean conocidos, podemos distinguir cuatro casos:

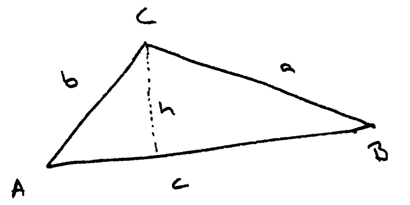
1. La hipotenusa y un ángulo
2. Un cateto y un ángulo
3. La hipotenusa y un cateto
4. Los dos catetos

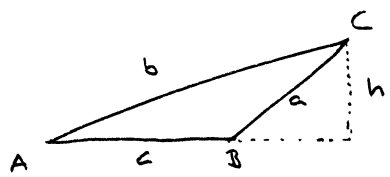
Para resolver cualquiera de los cuatro casos se usa el teorema de Pitágoras, las definiciones de las r.t. y las funciones circulares inversas.

Ejemplos y ejercicios

(...)

Area de un triángulo



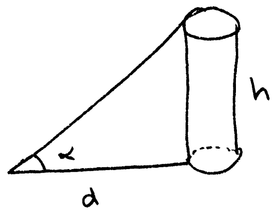


$h = a \operatorname{sen} \hat{B}$

$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c a \operatorname{sen} \hat{B}}{2}$$

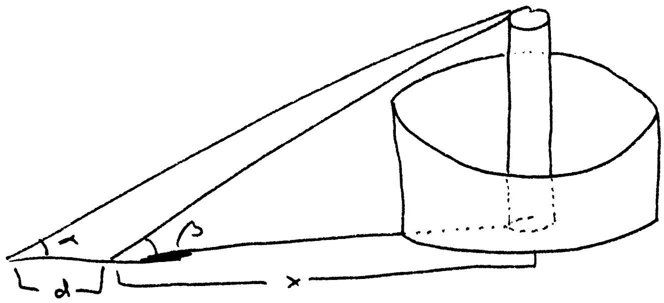
Altura de un edificio

a) De base accesible



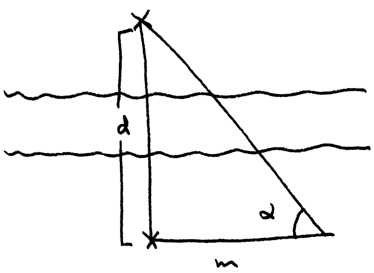
$$tg\,\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d\,tg\,\alpha$$

b) De base inaccesible



$$\left.\begin{aligned} ctg\,\alpha &= \frac{d+x}{h} \\ ctg\,\beta &= \frac{x}{h} \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = \frac{d}{ctg\,\alpha - ctg\,\beta}$$

Distancia a un punto inaccesible



$$d = m\,tg\,\alpha$$