Límite de funciones

1. Estudio de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Nombre de las funciones numéricas

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ función entera de variable natural.

etc...

Definición de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones reales de variable real

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \}.$$

Definición de función identidad

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x \end{aligned}$$

[Ej. y ej.]

Def. funciones constantes $\forall x \in \mathbb{R}, \quad K(x) = K$

Proposición

1. $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : \quad f \circ I = I \circ f = f$
2. $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \wedge \exists f^{-1} \Rightarrow f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

Dominio de una función

A veces se consideran funciones que realmente no lo son, porque no es posible calcular la imagen de todos los elementos de $\mathbb{R}$, como por ejemplo (...)

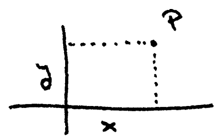
Por ello definimos el dominio de una función como el conj. de números reales de los que podemos calcular su imagen

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \Rightarrow D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) \}$$

Producto cartesiano

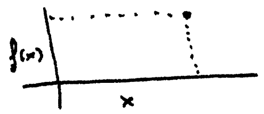
Sean A y B dos conjuntos; se define $A \times B = \{ \overset{\text{par}}{\overset{\downarrow}{(a,b)}} \mid a \in A \wedge b \in B \}$

Coordenadas cartesianas



Coordenadas cartesianas de P: $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Representación gráfica de una función



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to f(x)$$

Grafo o gráfica de f es

$$G(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \}$$

Ejemplos

a) Rectas

b) Parábolas

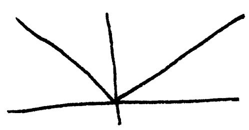
c) x^n

d) Definidas a trozos

e) f y f^{-1}

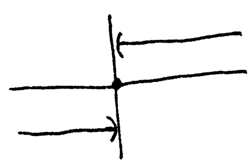
Función valor absoluto

$$|\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$



Función signo

$$sg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



2. Definiciones de límite

Ejemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \begin{cases} 2x & x<2 \\ 0 & x=2 \\ 8-2x & x>2 \end{cases}$$

Ver numéricamente que $x \to 2 \Rightarrow f(x) \to 4$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \begin{cases} 2x & x<2 \\ 0 & x=2 \\ 3 & x>2 \end{cases}$$

$x \to 2^- \Rightarrow g(x) \to 4$

$x \to 2^+ \Rightarrow g(x) \to 3$

Límite finito de una función en un punto

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $L, x_0 \in \mathbb{R}$.

Se dice que el límite de f cuando x tiende a x_0 es L cuando

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} L$

Ej. y ej.

b) 11 y 5J.

a) Funciones definidas a trozos

Límites infinitos de una función en un punto

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > M$

b) $-\infty$ $<$

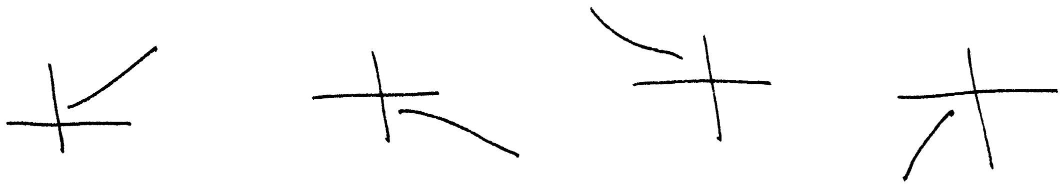
Límites finito de una función cuando $x \to \pm\infty$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{R} \mid x > n \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$<$

b) $-\infty$

Límites infinitos de una función cuando $x \to \pm\infty$



Límites laterales

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $L, x_0 \in \mathbb{R}$

a) Se dice que el límite de f cuando x tiende a x_0 por la derecha es L cuando

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Se escribe $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, $f(x) \xrightarrow{x\to x_0^+} L$

b) izquierda

c) También se pueden definir límites infinitos en un punto por los dos lados.

Ejemplos

a) $sg(x)$

b) Funciones definidas a trozos

Proposición

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

3. Operaciones con límites

Cuando se calcula el límite de una función cuando $x \to x_0$, $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$, son aplicables todas las reglas del cálculo de límites de sucesiones.

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R} \mid \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \wedge \lim_{x \to x_0} g(x)$

Entonces $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

Demostración

(...)

Proposición

1. $\lim_{x \to a} x = a$

2. $\lim_{x \to a} c = c$

4. Cálculo de límites

[Explicar con un ejemplo que hay que sustituir el valor de x_0 en f a ver si el límite sale, y que eso es válido]

Límites cuando $x \to \pm\infty$

Se tratan del mismo modo que los límites de sucesiones

Límites del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $x \to x_0$

Se suelen resolver usando la regla de Ruffini

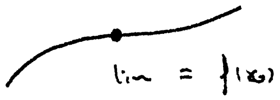
[Hacer la op. para sacar a la vez el cociente y el resto]

Límites del tipo 1^∞ cuando $x \to x_0$

Se basan en la siguiente propiedad:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(1 + f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

5. Continuidad de funciones

Ⓔ 

$\Longleftrightarrow$ No levantar tiza

Definiciones

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Se dice que f es continua en x_0 cuando

   a) $x_0 \in D(f)$

   b) Existe límite finito de f cuando $x \to x_0$

   c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. Si f no es continua en x_0, diremos que es discontinua en x_0, o que x_0 es un punto de discontinuidad de f

3. Se dice que f es continua cuando es continua en x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

4. $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ es continua} \}$.

5. Se dice que f es discontinua cuando tiene algún punto de discont.

Observación

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es continua en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

se puede intercambiar "f" y "lim"

Propiedades

1. $\forall K \in \mathbb{R}$: $f(x) = K$ es continua

2. $I \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

3. $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow f+g,\ fg,\ g \circ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

4. Si $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ los únicos puntos de discontinuidad de $\frac{f(x)}{g(x)}$ son aquellos a que $g(x) = 0$

5. Las funciones polinómicas ~~son~~ $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ son continuas.

Demostración

(...)

Teorema de Bolzano

Sean $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$ tales que $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo. Entonces $\exists\, c \in [a, b] \mid f(c) = 0$

Idea de la demostración

(...)

Tipos de discontinuidad [SUPRIMIBLE]

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de discontinuidad de f

Llamamos " salto de f en x_0 " a

$$S_{f,x_0} = \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$$

Hay tres tipos de discontinuidad :

a) Discontinuidad evitable : $S_{f,x_0} = 0$

Puede ocurrir que $x_0 \notin D(f)$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

b) Discontinuidad de primera especie $S_{f,x_0} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

c) " " segunda especie $S_{f,x_0} = \infty$

LF-P

Ruffini

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + 3x - 3}{x^2 + 3x - 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 3x^3 + x - 3}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 6}{3x^3 + 6x^2 - 2x - 4}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{3x^2 + 8x - 3}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 3x^3 + 3x - 9}{x^3 - x^2 - 6x}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 10}{2x^3 - 7x^2 + 9x - 6}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 - 3x - 4}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x^3+1)}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^2 + 11x + 24}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{4x^3 - 5x^2 + 1}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 6}{3x^3 + 6x^2 - 2x - 4}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{-x^4 - 2x^3 + 2x + 4}{x^2 - x - 6}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + 4x - 4}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 8x - 10}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^3 - 4x^2 - 6x + 24}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{5x^2 - 9x - 2}$$

LF - P

Cálculo efectivo

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{8}{8-x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt[3]{125x^3+64}}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{9x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{16x+4}-\sqrt{x}}$$

Continuidad

$\frac{1}{x^2+1}$ $\qquad (ax+b)^n$ $\qquad sg$ $\qquad \frac{1}{x^2-1}$ $\qquad \frac{1}{x^2+a}$

Segundo de B.U.P. Hoja de ejercicios M. 24.4.1990

Limites con logaritmos y continuidad.

$\boxed{*}$ Calcular los siguientes límites

(1) $\lim_{x \to 0^+} \left(\log(100x^2 + x) - \log(x + x^2) \right)$

(2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\log x}{x^2 - 1}$

(3) $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \log x \right)$

(4) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\log_2 x}{\log x}$

(5) $\lim_{x \to \infty} \left(\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) - \ln x \right)$

(6) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\log \ln x}{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$\boxed{*}$ Estudiar si las siguientes funciones son continuas

(7) $f(x) = \dfrac{6x - 2}{x^3 + 2x^2 + 5x}$

(8) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^8 + 10}$

(9) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x - 1}$

(10) $p(x) = \dfrac{7x^3 + 14x^2}{1428}$

(11) $q(x) = (6x^6 + 5x + 1) \cdot (22x^2 + 15x - 8)$

(12) $a(x) = \dfrac{1}{x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 4}$

(13) $b(x) = \dfrac{1}{x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 4x}$

Patentes y potentes ejercicios neuronales.

Hoja de teoría ***Parte C : Límite de funciones.*** **Fecha: L.24.2.1992**

```
100 rem *-------------------------------------------------------------------
110 rem *              Programa "Bolzano",   Pedro Reina,   J.20.2.1992
120 rem *
130 rem * OBJETIVO:    Resolver cualquier ecuación de la forma f(x)=0,
140 rem *              siendo f una función real de variable real continua
150 rem * ENTRADAS:    Hay que escribir la función f, editando la línea en
160 rem *              la que se define
170 rem *              Se introducen también "a" y "b", que son los extremos
180 rem *              del intervalo en el que se comienza la búsqueda
190 rem * SALIDAS:     Puede salir un mensaje indicando que el método no puede
200 rem *              encontrar ninguna solución, porque f(a) y f(b) no sean
210 rem *              de distinto signo, o bien una solución de la ecuación
220 rem * TEOREMA:     El programa se basa en el Teorema de Bolzano:
230 rem *              Si f: R -> R es una función continua en el intervalo
240 rem *              [a,b] y f(a) y f(b) son de distinto signo entonces existe
250 rem *              algún número c del intervalo [a,b] que verifica f(c)=0
260 rem * ALGORITMO:   Pedir al usuario los puntos a y b
270 rem *              Si f(a)=0 o f(b)=0, mostrar a o b, solución de la ecuación
280 rem *              Si f(a) y f(b) son del mismo signo, mostrar mensaje y fin
300 rem *              Asignar "a" y "b" a las variables FunPos y FunNeg
310 rem *                      según el signo de f(a) y f(b)
320 rem *              Repetir
330 rem *                  Hallar c, punto medio del intervalo de extremos
340 rem *                            FunPos y FunNeg
350 rem *                  Si f(c)=0, mostrar c, que es la solución
360 rem *                  Si f(c)>0, asignar a FunPos el valor c
370 rem *                  Si f(c)<0, asignar a FunNeg el valor c
380 rem *                  Si FunPos y FunNeg  están suficientemente cerca,
390 rem *                            mostrar FunPos como solución
400 rem *-------------------------------------------------------------------
410 :
420 rem *-------------------------------------------------------------------
430 rem * FUNCION:  f
440 rem * OBJETIVO: Hallar el valor de la función f en el punto x
450 rem * ENTRADAS: La variable independiente x
460 rem * SALIDAS:  El valor de la función, f(x)
470 rem * NOTA: Esta definición hay que variarla con arreglo a la ecuación
480 rem *       que se desee resolver
490 rem *-------------------------------------------------------------------
500 def fnf(x)=x^2-2
510 :
520 rem *-------------------------------------------------------------------
530 rem * Programa principal
540 rem *-------------------------------------------------------------------
550 input "Introduce a: "; a
560 input "Introduce b: "; b
570 :
580 if fnf(a)=0 then Solucion=a : goto 730
590 if fnf(b)=0 then Solucion=b : goto 730
600 :
610 if fnf(a)*fnf(b)>0 then print "f(a) y f(b) son del mismo signo" : end
620 :
630 if fnf(a)>0 then FunPos=a else FunNeg=a
640 if fnf(b)>0 then FunPos=b else FunNeg=b
650 :
660 rem Comienza el bucle de aproximación
670   c=(FunPos+FunNeg)/2  :  Valor=fnf(c)
680   if Valor=0 then Solucion=c : goto 730
690   if Valor>0 then FunPos=c else FunNeg=c
700   if abs(FunPos-FunNeg)<1E-6 then Solucion=FunPos : goto 730
710 goto 670
720 :
730 rem *-------------------------------------------------------------------
740 rem * PROCEDIMIENTO: Solución
750 rem * OBJETIVO:  Imprimir la solución de la ecuación
760 rem * ENTRADAS:  La variable "Solucion"
770 rem * SALIDAS:   Se presenta en pantalla
780 rem * ALGORITMO: Imprimir la solución. Terminar el programa
790 rem *-------------------------------------------------------------------
800 print "Solución = "; Solucion
```