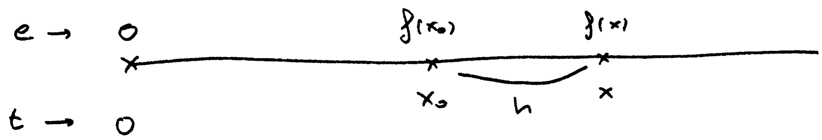
Cálculo diferencial

1. Derivada

(E) Dos problemas

I) Calcular la velocidad instantánea de un ciclista en un punto



x : tiempo

$f(x)$: distancia

a) Sensores en $f(x_0)$ y $f(x)$, para medir el tiempo h, p.ej.

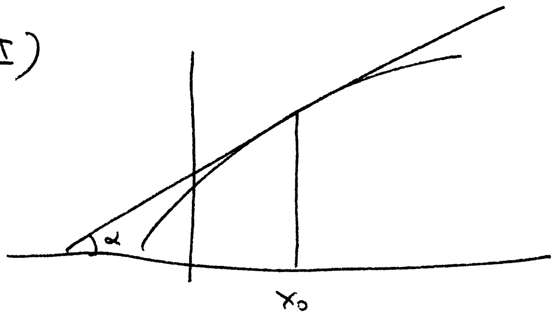
$f(x) - f(x_0) = 10$ m	$\Rightarrow h = 621$ ms	$\Rightarrow v = 58$ km/h.
5	286 ms	63
1	56	64.5
0.05	3	64.93
↓	↓	↓
0	0	65 Km/h, solución

b) Fijos en tiempo x_0, le damos un tiempo h al ciclista para seguir rodando y medimos $f(x) = f(x_0+h)$

En tiempo h recorre $f(x)-f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$

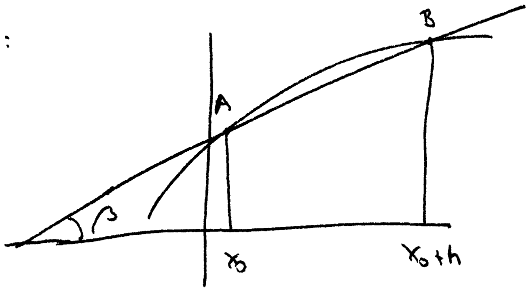
$$v = \frac{e}{t} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow v_{x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \text{ solución}$$

II)



Calcular $tg\ \alpha$

Método :



$$tg\ \alpha = \lim_{B\to A} tg\ \beta = \dots = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$, solución

<u>Definición</u>

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se dice que "f es derivable en x_0" cuando el

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe y es finito.

A ese valor se le llama "derivada de f en x_0" y se

escribe $f'(x_0)$.

Así pues, si f es derivable en x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

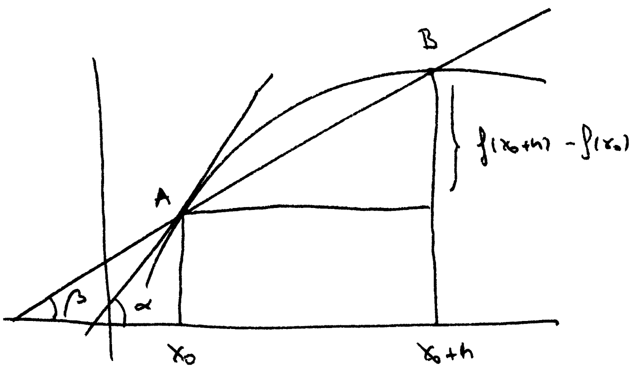
Ejemplo

a) Polinomios sencillos

b) sg

c) | |

Interpretación geométrica



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = tg\,\beta$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} tg\,\beta = \lim_{B\to A} tg\,\beta = tg\,\alpha$$

$$f'(x_0) = tg\,\alpha$$

La derivada de una función en un punto es igual a la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta tangente a la función en ese punto.

Otra notación

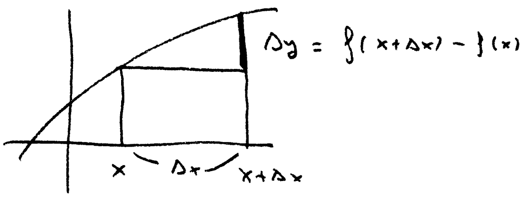
Si escribimos $y = f(x)$, al calcular la derivada en x_0 se escribe

$$y'_{x_0} = f'(x_0)$$

Incrementos y diferenciales

En matemáticas el aumento en el valor de una variable se llama "incremento" de esa variable, y se designa con la letra griega Δ (delta). Por ejemplo, un aumento en la variable z se escribe Δz (incremento de z)

Entonces



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

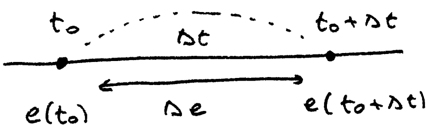
La derivada de una función en un punto es el límite cuando el incremento de la v.i. tiende a 0 del cociente del incr. de la v.d. entre el incr. de la v.i.

Cuando un incremento es infinitamente pequeño (tiende a cero) pasa a llamarse "diferencial" y se designa con la letra d. Por ej. si Δz es infinitamente pequeño se escribe dz (diferencial de z)

Entonces $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Podemos escribir $dy = f'(x)\,dx$

Ejemplo físico



$$v_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = e'(t_0)$$

Ejemplo : $e(t) = 2t^2$, hallar v_2

Función derivada

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Se dice que f es derivable cuando f es derivable en x $\forall x \in \mathbb{R}$

En ese caso se puede considerar la función $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f'(x)$, que se llama función derivada de f

Ejemplo : un polinomio de grado 2

Con la otra notación si derivamos $y = f(x)$ escribimos $y' = f'(x)$

Derivadas de orden superior

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es derivable, puede ocurrir que f' también lo sea. En ese caso se puede considerar la función $(f')'$, que se llama derivada segunda de f y se escribe f''. Si ésta es derivable, $(f'')' = f'''$ se llama derivada tercera de f.

En general, si $f^{(n}$ es derivable, $(f^{(n})' = f^{(n+1}$. El orden de $f^{(n}$ es n. Las derivadas de orden sup. se denotan con la otra notación $y'', y''', \ldots$

Ejemplo $x^2 + x + 1$

Proposición

1. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es derivable en x_0 entonces es continua en x_0
2. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es derivable entonces es continua.

Demostración

(...)

Consecuencia

Una función no es derivable en los puntos de discontinuidad

Contraejemplo

$f(x) = |x|$ es continua en 0, pero no es derivable en 0.

Así que las funciones pueden ser continuas pero no derivables

2. Cálculo de derivadas

Constante

$y = f(x) = k \Rightarrow y' = f'(x) = \dots = 0$; $\boxed{y = k \Rightarrow y' = 0}$

Identidad

(...)

Función potencial

(...)

Casos particulares

1. Raíz cuadrada
2. $y = \frac{1}{x}$

Suma

Si f y g son derivables, $f+g$ es derivable y $(f+g)' = f' + g'$

$$\boxed{y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)}$$

Demostración

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \dots = f'(x) + g'(x)$$

CD8

Producto

a) De dos funciones

Si f y g son derivables fg es derivable y $(fg)' = f'g + fg'$

$$\boxed{y = f(x)\, g(x) \Rightarrow y' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}$$

Demostración

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x+h) + f(x)\, g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \ldots\ldots$$

b) De tres funciones

(...)

c) De varias funciones [que lo piensen]

Caso particular: constante por función

$$y = k f(x) \Rightarrow y' = k f'(x)$$

Obsérvese que $y = \frac{f(x)}{k} = \frac{1}{k} f(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{k} f'(x) = \frac{f'(x)}{k}$

Cociente

Si f y g son derivables $\frac{f}{g}$ también lo es y $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}$$

Demostración [mejor por ln]

Observación

Derivar $\frac{f(x)}{k}$ como cociente

Función logarítmica

a) $y = \ln x$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h\to 0} \left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

b) $y = \log_a x$

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Función inversa

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \qquad & f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow y & & \quad y \longrightarrow x \\ \quad x+\Delta x \longrightarrow y+\Delta y & & \quad y+\Delta y \longrightarrow x+\Delta x \end{array}$$

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$$
$[= y' \cdot x']$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$$

Función exponencial

$$y = a^x \Longrightarrow x = \log_a y$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$y' = ? \qquad\qquad x' = \frac{1}{y \ln a}$$

$$y' \cdot x' = 1 \Longrightarrow y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = \boxed{a^x \ln a = y'}$$

Caso particular: e^x

(...)

Composición de funcions (Regla de la cadena)

a) De dos funcions

Si f y g son derivables, $g \circ f$ es derivable y $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

Demostración

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y & \longrightarrow & z \\ x + \Delta x & \longrightarrow & y + \Delta y & \longrightarrow & z + \Delta z \end{array}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot f'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$= ((g' \circ f) \cdot f)(x)$$

b) De tres funciones

$$(h \circ g \circ f)' = (h \circ (g \circ f))' = (h' \circ (g \circ f)) \cdot (g \circ f)' =$$

$$= (h' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f) \cdot f'$$

c) De varias funciones [Que lo piensen]

Funciones trigonométricas

a) $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = \cos x$ (sin demostración)

b) $y = \cos x \Rightarrow y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$

c) $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

d) $y = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow x = \operatorname{sen} y$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$y' = \,?\qquad x' = \cos y$

$$y' \cdot x' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e) $y = \operatorname{arc\,cos} x$ (...)

f) $y = \operatorname{arc\,tg} x$ (...)

CD 12

Derivación logarítmica

Si una función es difícil de derivar, se puede hacer el cálculo tomando ln:

$y = (\ldots\ldots)$

Así se pueden demostrar muchas de las fórmulas ya vistas, p. ej.:

$(\ldots)$

Derivación en forma implícita

A veces lo que se conoce de una función es una relación entre las dos variables. En ella se puede derivar

Ej. y ej.

$(\ldots)$

3. Crecimiento y convexidad de funciones

Notación

Vamos a designar por I un intervalo de ~~la~~ cualquier forma

Definiciones de crecimiento en intervalos

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función

1. Se dice que f es creciente en I cuando $\forall x, y \in I \mid x < y : f(x) < f(y)$
2. decreciente

Definiciones de crecimiento en un punto

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$

1. f creciente en $x_0 \iff \exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge f$ creciente en (a,b)
2. decreciente
3. f tiene un máx. rel. en $x_0 \iff \exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge \forall x \in (a,b) - \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$
4. mín.

Conjuntos convexos y cóncavos

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto.

1. A es convexo $\iff \forall P, Q \in A : \overline{PQ} \subset A$
2. A es cóncavo cuando no es convexo, e.d.: $\exists P, Q \in A \mid \overline{PQ} \not\subset A$

Definiciones de convexidad en intervalos

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ función. Consideramos $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \wedge y \leq f(x) \}$.

1. f convexa en I $\Leftrightarrow$ A convexo
2. f cóncava en I $\Leftrightarrow$ A cóncavo

Definiciones de convexidad en un punto

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. f convexa en x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge f$ convexa en (a,b)
2. f cóncava en x_0 $\Leftrightarrow$ f no es convexa en x_0, es decir:

   $\forall (a,b) \mid x_0 \in (a,b) :$ f cóncava en (a,b)

3. f tiene un punto de inflexión en x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge$

   $\wedge$ f es cóncava en los puntos de (a, x_0) $\wedge$ f es convexa en los puntos de (x_0, b) (o viceversa)

Ejercicios

Dibujar distintos tipos de funciones

4. Aplicación de las derivadas

Teoremas sobre crecimiento

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable [E] en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ creciente en x_0
2. $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en x_0
3. f tiene un mx. rel. en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
4. mn.
5. $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mn. rel. en x_0
6. $<$ mx.

Ejemplos

a) Estudiar el crecimiento de una función en un punto

b) Cálculo de mx. y mn. rel.

Teoremas sobre convexidad

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ s. d. en $x_0 \in \mathbb{R}$

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ cóncava en x_0
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ convexa en x_0
3. f tiene un p.i. en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$
4. $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un p.i. en x_0

Ejemplos

a) Estudiar la convexidad de una función en un punto.

b) Cálculo de p.i.

Tabla de derivadas

Constante	$y = k$	$y' = 0$		
Identidad	$y = x$	$y' = 1$		
Suma	$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$	$y = f(x) + g(x) + h(x)$	$y' = f'(x) + g'(x) + h'(x)$
Producto	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$	$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
	$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$	$y = \dfrac{f(x)}{k}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{k}$
Cociente	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(\ g(x)\ )^2}$		
	$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{-1}{x^2}$	$y = \dfrac{1}{f(x)}$	$y' = \dfrac{-1}{(\ f(x)\ )^2} \cdot f'(x)$
Composición	$y = g(f(x))$	$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = h(g(f(x)))$	$y' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Potencia	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = (\ f(x)\ )^n$	$y' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
Raíz cuadrada	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{(\ f(x)\ )}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{(f(x))}} \cdot f'(x)$
Logaritmo	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a} = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \dfrac{1}{\ln a} = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e$
Exponencial	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
Seno	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen}(f(x))$	$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
Coseno	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos(f(x))$	$y' = -\operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$
Tangente	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = \sec^2 f(x) \cdot f'(x) = \ldots$
Arco seno	$y = \arcsen x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$y = \arcsen(f(x))$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{(1-f(x)^2)}} \cdot f'(x)$
Arco coseno	$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$y = \arccos(f(x))$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{(1-f(x)^2)}} \cdot f'(x)$
Arco tangente	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$y = \operatorname{arctg}(f(x))$	$y' = \dfrac{1}{1 + (\ f(x)\ )^2} \cdot f'(x)$

Segundo de B.U.P. Matemáticas M. 22.5.1990

Ejercicios de cálculo diferencial 5ª evaluación

(*) Calcular las siguientes derivadas usando la definición y comprobarlas usando el cálculo de funciones derivadas

(1) $f'(-2)$, siendo $f(x) = 2x^2 - x - 6$ (2) $g'(1)$ siendo $g(x) = \frac{x+3}{x+1}$

(*) Derivar las siguientes funciones

(3) $y = x + 7$ (4) $z = tg\, y + \sqrt{7}$ (5) $t = arcsen\, p + \log 8$

(6) $x = e^y sen\, y$ (7) $y = \frac{arctg\, x}{x^7}$ (8) $q = \log_4 y + \ln y + \log_6 5$

(9) $y = 5\, sen\, x + x \cos x + \frac{sen\, x}{15}$ (10) $y = \frac{6}{x} - \sqrt[7]{x^2}$ (11) $y = \frac{x+1}{x+2}$

(12) $y = \ln arctg\, x$ (13) $y = arctg \ln x$ (14) $y = sen\, 7x + 5 \cos 6x$

(15) $y = \frac{1}{5^p + p^5}$ (16) $p = e^x sen\, 6x$ (17) $y = \frac{5 \cos 7x}{6^x + \ln x}$

(18) $y = sen^3 x^3$ (18) $h = tg^2 sen^2 \cos^2 x$ (19) $y = \sqrt{x + sen\, 5x}$

(20) $q = sen\left(p^3 + \cos\left(\frac{1}{p} + arctg\, p^2\right)\right)$ (21) $h = (6x^2 + 2)^6$

(*) Simplificar las siguientes funciones y después derivarlas

(22) $y = \frac{x^3+1}{x^3+1}$ (23) $z = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}}$ (24) $p = \ln \frac{h^6}{h^4}$

(25) $y = \frac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-3}{x+3}}$ (26) $q = \ln(e^p \cdot arctg\, p)$ (27) $y = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

(*) Derivar las siguientes funciones y después simplificarlas lo más posible

(28) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (29) $y = \frac{x+1}{x6}$ (30) $y = x \ln x + e^x (x^2 + 6x)$

(31) $y = \frac{sen\, 6x}{6}$ (32) $y = arctg\, x^3$ (33) $y = \ln sen\, x$

(*) Hallar las derivadas de las siguientes funciones usando derivación logarítmica

(34) $y = (sen\, x)^{7x^2+6x}$ (35) $y = (x+3)^{5x+8}$