Función inversa de una función real de variable real

Si f: ℝ → ℝ es una función biyectiva, se define la función inversa de f.

- ✱ Se designa f^{-1}
- ✱ También es una función real de variable real: f^{-1}: ℝ → ℝ
- ✱ La relación es: $f^{-1}(x) = y$ cuando $f(y) = x$

Ejemplos

① La función inversa de «multiplicar por dos» es «dividir entre dos»

$D(x) = 2x \Rightarrow D^{-1}(x) = x/2$. Lo vemos con algunos valores:

$D^{-1}(10) = 5$ porque $D(5) = 10$	$D^{-1}(-8) = -4$ porque $D(-4) = -8$

② La función inversa de «sumar tres» es «restar tres»

$T(x) = x+3 \Rightarrow T^{-1}(x) = x-3$. Lo vemos con algunos valores:

$T^{-1}(9) = 6$ porque $T(6) = 9$	$T^{-1}(-7) = -10$ porque $T(-10) = -7$

③ La función inversa de «multiplicar por cinco y sumar cuatro» es «restar cuatro y dividir entre cinco»

$P(x) = 5x+4 \Rightarrow P^{-1}(x) = (x-4)/5$. Lo vemos con algunos valores:

$P^{-1}(19) = 3$ porque $P(3) = 19$	$P^{-1}(-1) = -1$ porque $P(-1) = -1$

④ La función inversa de «sumar seis y multiplicar por siete» es «dividir entre siete y restar seis»: $Q(x) = 7(x+6) \Rightarrow Q^{-1}(x) = x/7-6$.

Propiedad

Llamamos «I» a la función identidad de los números reales, I: ℝ → ℝ, $I(x) = x$.

La función f: ℝ → ℝ es una biyectiva y por tanto, existe la función inversa de f, f^{-1}.

Entonces, se verifican estas dos igualdades:

$f^{-1}\circ f = I$	$f\circ f^{-1} = I$

En otras palabras: si componemos una función con su inversa, en cualquier orden, obtenemos la función identidad de ℝ; partiendo de un número real y aplicando la función y su inversa, volvemos al número original.

Ejemplos

Considerando las funciones del ejemplo anterior:

$(D^{-1}\circ D)(5) = D^{-1}(D(5)) = D^{-1}(10) = 5 = I(5)$	$(D\circ D^{-1})(10) = D(D^{-1}(10)) = D(5) = 10 = I(10)$
$(D^{-1}\circ D)(-4) = D^{-1}(D(-4)) = D^{-1}(-8) = -4 = I(-4)$	$(D\circ D^{-1})(-8) = D(D^{-1}(-8)) = D(-4) = -8 = I(-8)$
$(T^{-1}\circ T)(6) = T^{-1}(T(6)) = T^{-1}(9) = 6 = I(6)$	$(T\circ T^{-1})(10) = T(T^{-1}(10)) = T(5) = 10 = I(10)$
$(T^{-1}\circ T)(-10) = T^{-1}(T(-10)) = T^{-1}(-7) = -10 = I(-10)$	$(T\circ T^{-1})(9) = T(T^{-1}(9)) = T(6) = 9 = I(9)$
$(P^{-1}\circ P)(3) = P^{-1}(P(3)) = P^{-1}(19) = 3 = I(3)$	$(P\circ P^{-1})(19) = P(P^{-1}(19)) = P(3) = 19 = I(19)$
$(P^{-1}\circ P)(-1) = P^{-1}(P(-1)) = P^{-1}(-1) = -1 = I(-1)$	$(P\circ P^{-1})(-1) = P(P^{-1}(-1)) = P(-1) = -1 = I(-1)$
$(Q^{-1}\circ Q)(-4) = Q^{-1}(Q(-4)) = Q^{-1}(14) = -4 = I(-4)$	$(Q\circ Q^{-1})(14) = Q(Q^{-1}(14)) = Q(-4) = 14 = I(14)$