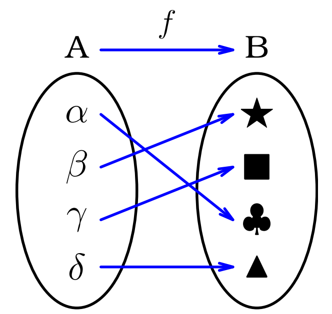
Definición de función inversa

Si f: A → B es una función biyectiva, se define la función inversa de f.

- Se designa f^{-1}
- Relaciona elementos de B con elementos de A, es decir: f^{-1}: B → A
- La relación es: $f^{-1}(x) = y$ cuando $f(y) = x$

Ejemplo

Consideramos los conjuntos A={α,β,γ,δ} y B={★,■,♣,▲} y la función *f* definida con el diagrama de Euler de abajo a la izquierda. Vemos la función f^{-1} en el diagrama de Euler de abajo a la derecha. En el centro están las justificaciones individuales para cada elemento.

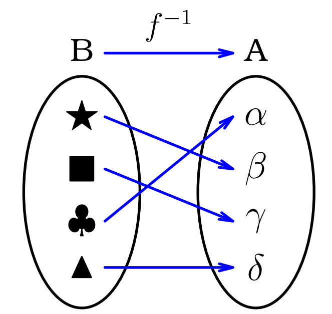


f^{-1}(★) = β porque f(β) = ★

f^{-1}(■) = γ porque f(γ) = ■

f^{-1}(♣) = α porque f(α) = ♣

f^{-1}(▲) = δ porque f(δ) = ▲



El problema del nombre

El concepto de función inversa es muy claro: deshacer lo que hace la función original. Sin embargo, puede resultar confuso denominarlo «función inversa», porque la idea que hay tras la denominación «número inverso» es diferente, a primera vista.

Por eso, verás que algunos textos de matemáticas utilizan otra palabra para designar este concepto. Nosotros no lo haremos, porque existe una manera de establecer un paralelismo entre los conceptos de función inversa y número inverso.

Propiedad

Si llamamos I_A a la función identidad en A (I_A: A → A definida como $I_A(x) = x$) y llamamos I_B a la función identidad en B (I_B: B → B definida como $I_B(x) = x$), se verifican estas dos igualdades:

$f^{-1} \circ f = I_A$	$f \circ f^{-1} = I_B$

En otras palabras: si componemos una función con su inversa, en cualquier orden, obtenemos la función identidad del conjunto correspondiente; partiendo de un elemento y aplicando la función y su inversa, volvemos al elemento original.

Ejemplo

Considerando las funciones del ejemplo anterior:

$(f^{-1} \circ f)(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha)) = f^{-1}$(♣) $= \alpha = I_A(\alpha)$	$(f \circ f^{-1})$(★) = f(f^{-1}(★)) = f(β) = ★ = I_B(★)
$(f^{-1} \circ f)(\beta) = f^{-1}(f(\beta)) = f^{-1}$(★) $= \beta = I_A(\beta)$	$(f \circ f^{-1})$(■) = f(f^{-1}(■)) = f(γ) = ■ = I_B(■)
$(f^{-1} \circ f)(\gamma) = f^{-1}(f(\gamma)) = f^{-1}$(■) $= \gamma = I_A(\gamma)$	$(f \circ f^{-1})$(♣) = f(f^{-1}(♣)) = f(α) = ♣ = I_B(♣)
$(f^{-1} \circ f)(\delta) = f^{-1}(f(\delta)) = f^{-1}$(▲) $= \delta = I_A(\delta)$	$(f \circ f^{-1})$(▲) = f(f^{-1}(▲)) = f(δ) = ▲ = I_B(▲)