

Operaciones combinadas con funciones

Se pueden combinar varias operaciones con funciones para obtener una nueva función. Como siempre que se usan varias operaciones en la misma expresión, hay que establecer una jerarquía de operaciones. Sin embargo, no existe un consenso sobre la jerarquía completa de operaciones con funciones. Lo máximo que se puede establecer es:

- * Los paréntesis tienen la máxima prioridad, como siempre; si hay paréntesis anidados, hay que comenzar por los interiores.
- * Tras ellos, se calculan los productos y cocientes, comenzando por la izquierda.
- * Tras ellos, las sumas y diferencias, comenzando por la izquierda.
- * Las composiciones se hacen antes que las sumas y las diferencias.
- * Si aparecen composiciones y productos o cocientes, hay que indicar el orden de cálculo explícitamente usando paréntesis.

La composición de funciones es asociativa

Si se componen más de dos funciones, no es necesario indicar el orden de cálculo, porque la composición es asociativa; es decir, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ y por tanto basta expresar la función composición de las tres funciones como $h \circ g \circ f$.

Se escriba como se escriba, siempre se verifica que $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$.

Enunciado

Definimos tres funciones reales de variable real: $p(\alpha) = \alpha^2$, $q(\beta) = 3\beta$, $r(\gamma) = \gamma + 2$

Calcula las siguientes funciones y da los resultados como polinomios lo más sencillos que sea posible escribiendo los monomios en orden descendente de grados.

- ① $pq+r$ ② $(p+q) \circ r$ ③ $p \circ q \circ r$ ④ $r \circ q \circ p$

Resolución

Como nos piden varias funciones, debemos averiguar sus expresiones analíticas; para darlas, elegimos la letra «x» para representar la variable independiente.

- ① $pq+r \rightarrow (pq+r)(x) = (pq)(x) + r(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x) = x^2 \cdot 3x + x + 2 = 3x^3 + x + 2$.

Solución: $(pq+r)(x) = 3x^3 + x + 2$

- ② Hay que comenzar por averiguar la expresión analítica de $p+q$:

$$p+q \rightarrow (p+q)(x) = p(x) + q(x) = x^2 + 3x$$

Ahora ya se puede calcular $(p+q) \circ r$:

$$(p+q) \circ r \rightarrow ((p+q) \circ r)(x) = (p+q)(r(x)) = (p+q)(x+2) = (x+2)^2 + 3(x+2) = x^2 + 4x + 4 + 3x + 6 = x^2 + 7x + 10.$$

Solución: $((p+q) \circ r)(x) = x^2 + 7x + 10$

- ③ $p \circ q \circ r \rightarrow (p \circ q \circ r)(x) = p(q(r(x))) = p(q(x+2)) = p(3(x+2)) = p(3x+6) = (3x+6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$.

Solución: $(p \circ q \circ r)(x) = 9x^2 + 36x + 36$

- ④ $r \circ q \circ p \rightarrow (r \circ q \circ p)(x) = r(q(p(x))) = r(q(x^2)) = r(3x^2) = 3x^2 + 2$.

Solución: $(r \circ q \circ p)(x) = 3x^2 + 2$