Complejidad de la trigonometría

La parte teórica de la trigonometría puede parecer complicada, puesto que hay una enorme cantidad de fórmulas e identidades, como verás con amplitud en el nivel 5 de este curso. Pero también hay que saber que como todas las razones trigonométricas se definen a partir de muy pocos componentes, están muy relacionadas entre sí y eso facilita las cosas.

Por eso, te animamos a que te vayas familiarizando con las identidades trigonométricas y sus demostraciones poco a poco. Cuanto más las trabajes, mejor las conocerás y más fácil te resultará demostrar las nuevas. No pierdas de vista que cuando se estudian algunos niveles más avanzados de matemáticas, el correcto manejo de las fórmulas e identidades trigonométricas resulta esencial.

Técnicas de demostración de identidades

Cuando afontas la demostración de una identidad, puedes intentar varias técnicas; con que te funcione una de ellas, tienes suficiente.

Comenzar por un miembro y terminar en el otro

Eliges uno de los dos miembros de la identidad (no tiene por qué ser el primero, perfectamente puedes arrancar del segundo) y vas haciendo trasformaciones usando cualquiera de las identidades que ya conoces (tanto trigonométricas como algebraicas) hasta llegar exactamente al otro miembro.

Ejemplo 1. Demuestra que $\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}=1$

Comenzamos por el primer miembro y terminamos en el segundo:

$$\frac{\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha} = \frac{(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha} = \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$$

Hemos utilizado $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ y la relación pitagórica.

Ejemplo 2. Demuestra que $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha}$

Comenzamos por el segundo miembro y terminamos en el primero:

$$\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Desarrollar cada miembro independientemente hasta llegar a lo mismo

Desarrollas un miembro hasta llegar a una expresión que te parezca sencilla. A continuación, desarrollas el otro miembro hasta llegar a la misma expresión que antes. Dos expresiones iguales a una tercera son iguales entre sí, con lo que queda demostrada la identidad.

Ejemplo 3. Demuestra que $\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

$$\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} = \frac{(\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{(\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

