Identidades trigonométricas

- Son identidades (es decir, igualdades ciertas para cualquier valor) en las que intervienen razones trigonométricas.
- Tienen una gran importancia teórica y práctica para poder desarrollar teorías matemáticas más avanzadas y poder resolver algunos problemas.

Identidades trigonométricas sencillas

En este curso ya han aparecido las identidades trigonométricas más simples, que repetimos aquí:

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	$(\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\csc\alpha)=1$	$(\cos\alpha)\cdot(\sec\alpha)=1$	$(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\operatorname{ctg}\alpha)=1$	$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Las tres identidades centrales permiten escribir también estas útiles identidades:

$\csc\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{\csc\alpha}$	$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

Notación para las potencias de las razones trigonométricas

Existen muchas expresiones trigonométricas en las que aparecen potencias de razones trigonométricas. Por eso, se utiliza una manera de escribirlas sin paréntesis. Por ejemplo, en vez de escribir $(\operatorname{sen}\alpha)^2$, se escribe $\operatorname{sen}^2\alpha$.

Relación pitagórica

Es una de las identidades trigonométricas más utilizadas. Establece que dado un ángulo agudo α, la suma del cuadrado de su seno y el cuadrado de su coseno es 1.

$$\boxed{\alpha\in(0°,90°) \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1}$$

Comprobación 1

$$\operatorname{sen}^2 30°+\cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Comprobación 2

$$\operatorname{sen}^2 45°+\cos^2 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}+\frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

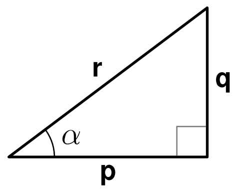
Comprobación 3

$\operatorname{sen}^2 37°+\cos^2 37° = 1$

Calculadora en modo DEG: (SIN 3 7) x^2 + (COS 3 7) x^2 = ⇨ 1

Demostración

Utilizando el triángulo rectángulo de la derecha:



$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = \left(\frac{p}{r}\right)^2+\left(\frac{q}{r}\right)^2 = \frac{p^2}{r^2}+\frac{q^2}{r^2} = \frac{p^2+q^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Como ves, en la demostración se usa el teorema de Pitágoras, lo que da nombre a la relación.

Utilización

La relación pitagórica se usa para calcular el seno (o el coseno) de un ángulo cuando se conoce su coseno (o su seno) y para demostrar otras identidades.