Enunciados

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

① $\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sec^2\alpha}$

② $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}=2\cdot\operatorname{tg}\alpha$

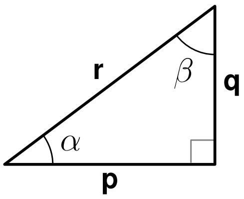
③ $\dfrac{\csc\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1$

④ $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^4\alpha-\sec^2\alpha$

⑤ $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) = (1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$

Enunciados

Te proponemos que consideres los dos siguientes problemas como relacionados.



⑥ Usando el triángulo rectángulo de la figura de la derecha, compueba que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$.

⑦ Demuestra que si los ángulos α y β son complementarios, entonces se verifica: $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta = \cos^2\alpha+\cos^2\beta$

Enunciados

Estudiaremos en profundidad las ecuaciones trigonométricas en el nivel 5 de este curso, pero los siguientes problemas te orientan hacia el trabajo que haremos.

Averigua la amplitud de todos los ángulos agudos α que verifican cada una de las siguientes expresiones:

⑧ $\operatorname{tg}^2\alpha-2{,}225\cdot\operatorname{tg}\alpha+1 = 0$

⑨ $\operatorname{sen}^2\alpha-2{,}05\cdot\operatorname{sen}\alpha+1 = 0$

Enunciados

Con los siguientes problemas puedes ir constatando que el uso de identidades trigonométricas facilita la resolución de algunas ecuaciones trigonométricas.

Averigua la amplitud de todos los ángulos agudos α que verifican cada una de las siguientes expresiones:

⑩ $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha = 3$

⑪ $\operatorname{sen}\alpha-\cos^2\alpha = 0{,}715$

⑫ $\sec^2\alpha = 5\cdot\operatorname{tg}\alpha$

Soluciones

Hay muchas maneras correctas de demostrar identidades trigonométricas. Aquí te mostramos una posibilidad para cada problema, que no tiene por qué coincidir con la que hayas escrito tú.

① $$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}\cdot\frac{1}{\sec^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{1-\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$$

② $$\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha\cdot\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha}\right) = \cos\alpha\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\alpha-(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)} =$$

$$= \cos\alpha\cdot\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \cos\alpha\cdot\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha$$

③ $$\frac{\csc\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 1$$

④ Primer miembro: $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha = (\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha + 1) = (\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot(\sec^2\alpha)$

Segundo miembro: $\sec^4\alpha - \sec^2\alpha = (\sec^2\alpha)\cdot(\sec^2\alpha - 1) = (\sec^2\alpha)\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha)$

⑤ Primer miembro: $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) = (1-\cos^2\alpha)\cdot\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right) =$

$$= \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$$

Segundo miembro: $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha = (\sec^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha = ((\sec\alpha)\cdot(\cos\alpha))^2 = 1$

⑥ $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \dfrac{q}{r}$

⑦ Primer miembro: $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta = \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta = 1$

Segundo miembro: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$

⑧ $\alpha = \begin{cases} 32°\,0'\,19'' \\ 55°\,26'\,37'' \end{cases}$

⑨ $\alpha = 53°\,7'\,48''$

⑩ $\alpha = \begin{cases} 20°\,54'\,19'' \\ 69°\,5'\,41'' \end{cases}$

⑪ $\alpha = 64°\,23'\,37''$

⑫ $\alpha = \begin{cases} 11°\,47'\,21'' \\ 78°\,12'\,39'' \end{cases}$