## Producto escalar y perpendicularidad

Existe una importante propiedad que relaciona estos dos conceptos:

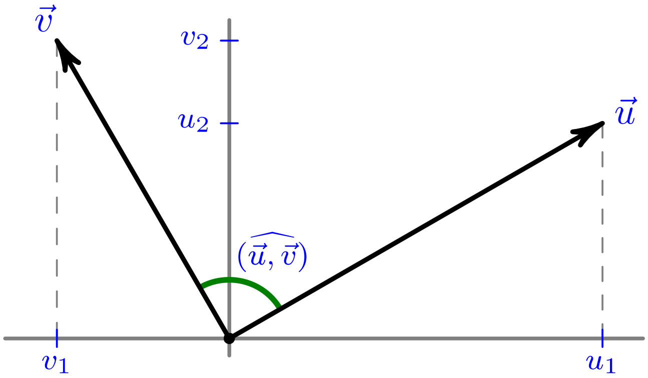
Dados dos vectores no nulos, su producto escalar es cero si y solo si son perpendiculares. Expresado simbólicamente:

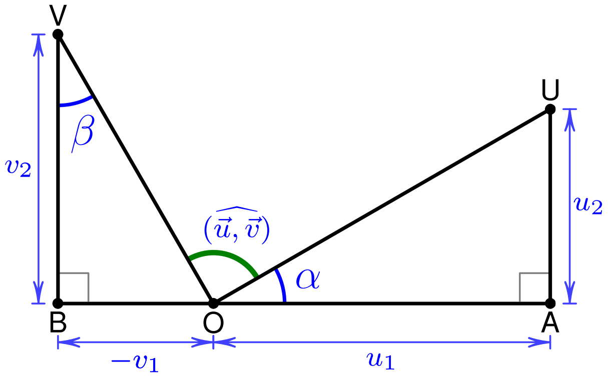
$$\boxed{\text{Siendo } \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}, \ \vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$$

**Demostración**

Se pueden dar muchos casos, así que, para no recargar la explicación, elegimos solamente uno, pero muy representativo.

Supongamos que $\vec{u}=(u_1,u_2)$ es un vector del primer cuadrante (con lo que $u_1,u_2>0$) y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es un vector del segundo cuadrante (con lo que $v_1<0$ y $v_2>0$) y vamos a demostrar que $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 90°$. Abajo a la izquierda vemos un esquema de la situación y abajo a la derecha señalamos los triángulos rectángulos OUA y OVB:




$$\vec{u}\vec{v} = 0 \Rightarrow (u_1,u_2)(v_1,v_2) = 0 \Rightarrow u_1v_1+u_2v_2 = 0 \Rightarrow u_2v_2 = -u_1v_1 \Rightarrow \frac{u_2}{-v_1}=\frac{u_1}{v_2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ los triángulos rectángulos OUA y OVB son semejantes $\Rightarrow \alpha = \beta$

$$\angle(BOA) = 180° \Rightarrow \angle(BOV)+\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\alpha = 180° \Rightarrow (90°-\beta)+\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\alpha = 180° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90°-\alpha+\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\alpha = 180° \Rightarrow 90°+\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 180° \Rightarrow \widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 90°$$

## Ejemplos

① Enunciado: estudia si los vectores $\vec{a}=(5,3)$ y $\vec{c}=(-2,3)$ son perpendiculares.

Comentario: en casos como este, en que la representación gráfica no es suficientemente precisa, el uso de esta propiedad es muy conveniente.

Resolución: $\vec{a}\vec{c} = (5,3)(-2,3) = -10+9 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ no son perpendiculares.

② Enunciado: estudia si los vectores $\vec{e}=(-8,5)$ y $\vec{m}=(5,8)$ son perpendiculares.

Resolución: $\vec{e}\vec{m} = (-8,5)(5,8) = -40+40 = 0 \Rightarrow$ sí son perpendiculares.

③ Enunciado: estudia si los vectores $\vec{r}=(0,7)$ y $\vec{s}=(4,0)$ son perpendiculares.

Comentario: este es el caso trivial, porque cada vector está en un eje de coordenadas distinto, que son perpendiculares; aún así, podemos comprobarlo calculando el producto escalar:

Resolución: $\vec{r}\vec{s} = (0,7)(4,0) = 0\cdot7+4\cdot0 = 0+0 = 0 \Rightarrow$ sí son perpendiculares.