Producto de un número real y un vector del plano

Si α es un número real y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es un vector del plano, definimos el producto del número α y el vector $\vec{v}$ como el vector que tiene componentes $(\alpha v_1,\alpha v_2)$. Se escribe $\alpha\cdot\vec{u}$ o sencillamente $\alpha\vec{u}$ (y nunca se escribe $\vec{u}\cdot\alpha$ ni $\vec{u}\,\alpha$).

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\vec{v}=(\alpha v_1,\alpha v_2)$$

Ejemplos

① El producto del número 2 y el vector $\vec{a}=(3,-7)$ es
$2\vec{a}=2(3,-7)=(2\cdot3,2(-7))=(6,-14)$

② El producto del número -3 y el vector $\vec{c}=(2,-5)$ es
$-3\vec{c}=-3(2,-5)=(-3\cdot2,-3(-5))=(-6,15)$

Propiedades del producto de número y vector

Suponemos que α es un número real distinto de cero y $\vec{v}$ es un vector del plano distinto del vector nulo. Entonces:

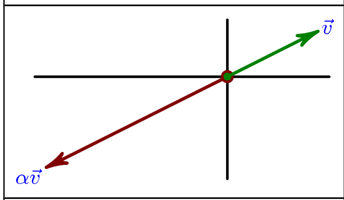
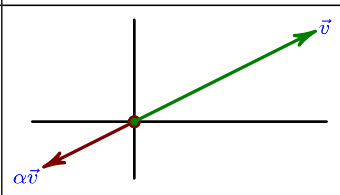
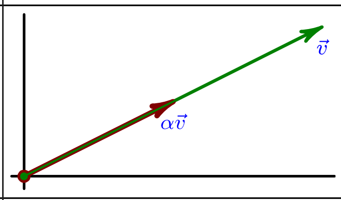
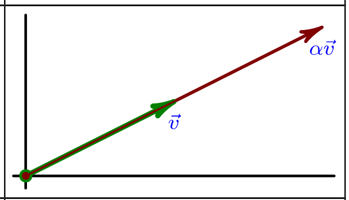
✱ Propiedades sobre el **módulo**:
- ■ Si $|\alpha|<1$, entonces $|\alpha\vec{v}|<|\vec{v}|$
- ■ Si $|\alpha|>1$, entonces $|\alpha\vec{v}|>|\vec{v}|$

✱ Propiedad sobre la **dirección**:
- ■ Los vectores $\alpha\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

✱ Propiedades sobre el **sentido**:
- ■ Si $\alpha>0$, entonces $\alpha\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo sentido.
- ■ Si $\alpha<0$, entonces $\alpha\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen distinto sentido.

Ejemplos

En los siguientes ejemplos usamos el color verde para representar un vector $\vec{v}$ y el color rojo para representar el vector $\alpha\vec{v}$, según distintos valores de α.

③ $\alpha\in(\leftarrow,-1)$	④ $\alpha\in(-1,0)$	⑤ $\alpha\in(0,1)$	⑥ $\alpha\in(1,\rightarrow)$
			
$\lvert\alpha\vec{v}\rvert>\lvert\vec{v}\rvert$ Distinto sentido	$\lvert\alpha\vec{v}\rvert<\lvert\vec{v}\rvert$ Distinto sentido	$\lvert\alpha\vec{v}\rvert<\lvert\vec{v}\rvert$ Mismo sentido	$\lvert\alpha\vec{v}\rvert>\lvert\vec{v}\rvert$ Mismo sentido

Casos triviales

✱ Si $\alpha=-1$, el producto $-1\vec{v}$ se escribe $-\vec{v}$ y se llama **vector opuesto** a $\vec{v}$.
- ■ Se verifica $-\vec{v}+\vec{v}=\vec{o}$.
- ■ También se escribe $\vec{v}-\vec{v}=\vec{o}$ y se dice que restar es sumar el opuesto.

✱ Si α es un número real, entonces $\alpha\vec{o}=\vec{o}$

✱ Si $\vec{v}$ es un vector del plano, entonces $0\vec{v}=\vec{o}$ y $1\vec{v}=\vec{v}$

