Enunciados

① Sabemos que el número de oro es $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Demuestra:

a) $\Phi^2=\Phi+1$ b) $\frac{1}{\Phi}=\Phi-1$

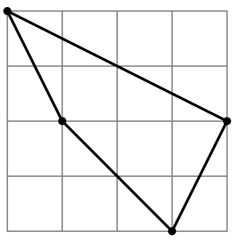
② Demuestra que $\sqrt{7+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

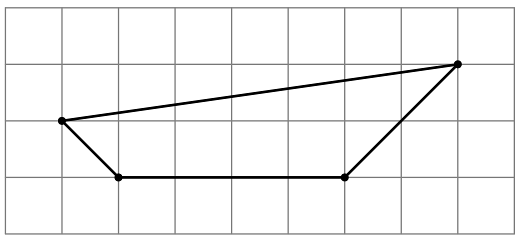
③ Demuestra que $\sqrt[4]{1561-696\sqrt{5}}=3-2\sqrt{5}$

④ Expresa de manera exacta el cociente entre la longitud de la altura de un tetredro regular y la longitud de su lado.

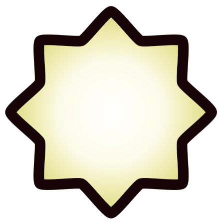
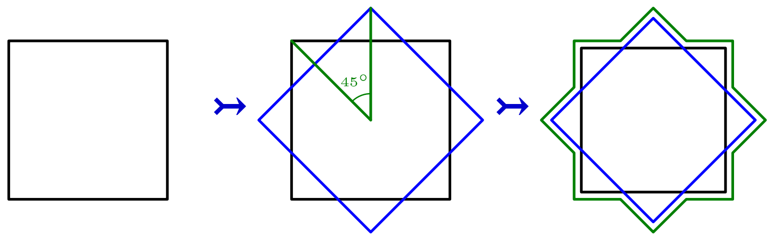
⑤ Expresa de manera exacta el cociente entre la longitud de la diagonal de un octaedro regular y la longitud de su lado.

⑥ En las dos siguientes figuras la unidad de medida es la longitud del lado de cada cuadradito gris. Expresa de manera exacta la longitud del perímetro de los cuadriláteros señalados.

a) 

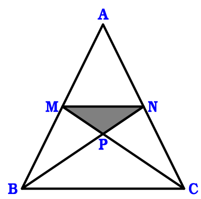
b) 

⑦ La estrella de ocho puntas es un polígono que ha sido usado por numerosas culturas y ha recibido diferentes nombres, como «estrella tartésica». Se puede obtener a partir de un cuadrado, girándolo 45° y uniendo los ocho vértices y las ocho intersecciones entre los dos cuadrados.

Estrella tartésica	Obtención de la estrella tartésica
	

Si partimos de un cuadrado cuyo lado mida 2, expresa de manera exacta la longitud del lado de la estrella.

⑧ Si ABC es un triángulo equilátero cuyo lado mide 12, M y N los puntos medios de AB y AC, y P es el punto de intersección de CM y BN, expresa de manera exacta el área del triángulo MNP.



⑨ En un cuadrado de vértices A, B, C y D cuyo lado mide 1 trazamos la diagonal AC; después trazamos las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y ABC, cuyos centros son respectivamente los puntos E y F. Expresa de manera exacta el área del cuadrilátero AFCE.

Soluciones

① a) $\Phi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}+1 = \Phi+1$

b) $\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \Phi-1$

② $(2+\sqrt{3})^2 = \ldots = 7+\sqrt{3}$

③ $(3-2\sqrt{5})^4 = ((3-2\sqrt{5})^2)^2 = \ldots = (29-12\sqrt{5})^2 = \ldots = 1561-696\sqrt{5}$

④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

⑤ $\sqrt{2}$

⑥ (a) $2\sqrt{2}+4\sqrt{5}$ (b) $4+8\sqrt{2}$

⑦ $\sqrt{2}-1$

⑧ $3\sqrt{3}$

⑨ $\sqrt{2}-1$

Procedencia

✱ El problema (8) se propuso en la Olimpiada Matemática Nacional de 2003 de la FESPM con el número 5, apartado 14. El enunciado ha sido modificado para adaptarlo a este curso.

✱ El problema (9) se propuso en la Olimpiada Matemática Nacional de 2003 de la FESPM con el número 2. El enunciado ha sido modificado para adaptarlo a este curso.