Clasificaciones de los números reales

Según la definición de hemos dado de los números reales, estos se pueden clasificar como racionales o irracionales. Sin embargo, hay aún otra clasificación que indaga en otras características que pueden tener los números reales.

Números algebraicos y trascencentes

✱ Se dice que un número real es un número algebraico cuando es la raíz de algún polinomio cuyos coeficientes son números enteros y no son todos nulos.

✱ Se dice que un número real es un número trascencente cuando no es un número algebraico.

Ejemplos

① El número $\sqrt{2}$ es algebraico porque es raíz del polinomio x^2-2.

② El núméro $\sqrt[3]{49}$ es algebraico porque es raíz del polinomio x^3-49.

③ El número de oro $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es algebraico porque es raíz del polinomio x^2-x-1.

Propiedad

Todo número racional es un número algebraico.

Demostración

Sea x un número racional.

Existen dos números enteros p y q (con $q\neq0$) que verifican $x=\frac{p}{q}$.

Deducimos: $x=\frac{p}{q} \Rightarrow qx=p \Rightarrow qx-p=0$

Luego x es raíz del polinomio $qx-p$, con $q\neq0$.

Algunos números que se sabe que son trascencentes

✱ No es nada fácil demostrar que un número es trascencente. De hecho, hay pocas demostraciones de que algún número es trascencente.

✱ Se sabe que π y e son trascendentes.

Cardinales de los tipos de números reales

✱ Sabemos que el conjunto de números racionales es numerable. Por tanto, el conjunto de números irracionales es no numerable.

✱ No es difícil demostrar que el conjunto de números algebraicos es numerable, de lo que se deduce que el conjunto de números trascendentes es no numerable.

Propuesta

Piensa cómo se podría demostrar la siguiente propiedad: «si un número real es raíz de un polinomio con coeficientes racionales no todos nulos, entonces es un número albebraico». Para ayudarte a pensar: hay solo un número que es raíz del polinomio $\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{5}x^3-\frac{7}{11}$; ese número es raíz de infinitos polinomios con coeficientes enteros. ¿Cuál de ellos tiene el menor coeficiente positivo de x^5? Puedes ver la solución más abajo, a la derecha, pero necesitarás un espejo para verla bien.

$55x^5+66x^3-105$

