Conjuntos numerables

- En el nivel 1 del curso pudiste ver que card(ℤ)=card(ℕ).
- En el nivel 2 del curso pudiste ver que card(ℚ)=card(ℕ).
- En ambos casos la demostración consistió en establecer una correspondencia biunívoca (es decir, cada elemento de cada conjunto se relaciona con un elemento del otro) entre los elementos de ℤ o ℚ con los de ℕ.
- Los conjuntos que tienen el mismo cardinal que ℕ se llaman conjuntos **numerables**; se elige esa palabra para indicar que podemos poner los elementos del conjunto «en fila» y contarlos usando números naturales (1, 2, 3, etcétera).

El conjunto de los números reales no es numerable

Esta afirmación es bastante «fuerte», porque nos indica que hay diferentes tamaños de infinito, algo que, en principio, no es intuitivo, ¡pero que es verdad! Vamos a mostrarte una versión ligeramente simplificada de la demostración, que tiene gran importancia en matemáticas por utilizar una técnica llamada diagonalización.

Demostración

Vamos a demostrar por reducción al absurdo que el conjunto de números del intervalo abierto (0,1) no es numerable. Supongamos que fuera numerable; en ese caso, podríamos escribir todos los números reales de (0,1) en una lista numerada, como por ejemplo comenzaría la que vemos abajo la izquierda:

1	0,2294843590...
2	0,8404119383...
3	0,1192002237...
4	0,0010122838...
5	0,7739705311...
6	0,9384763091...
7	0,4912094203...
8	0,9388509219...
9	0,1009482733...
10	0,1120491290...

1	0,**2**294843590...
2	0,8**4**04119383...
3	0,11**9**2002237...
4	0,001**0**122838...
5	0,7739**7**05311...
6	0,93847**6**3091...
7	0,491209**4**203...
8	0,9388509**2**19...
9	0,10094827**3**3...
10	0,112049129**0**...

Nos fijamos en la primer cifra decimal del primer número de la lista, la segunda cifra decimal del segundo número de la lista, y así sucesivamente, como vemos señalados arriba a la derecha.

Formamos un número del intervalo (0,1) eligiendo sus cifras decimales de modo que sean distintas de las que hemos señalado antes; por ejemplo:

0,3501875341...

El número así construido no es igual a ningún número de la lista porque difiere del primer número en el primer decimal, del segundo número en el segundo decimal, etcétera. Pero está claro que el número pertenece al intervalo (0,1), luego deducimos que en la lista no estaban todos los números del intervalo (0,1), como habíamos supuesto. Hemos llegado a una contradicción, luego el conjunto de números reales del intervalo (0,1) no es numerable y por tanto tampoco lo es ℝ.

