Partes de un conjunto

Un concepto muy interesante en la teoría de conjuntos es considerar el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto, llamado partes del conjunto. Suena a trabalenguas, así que lo vemos con detenimiento con un ejemplo.

Ejemplo 1

Enunciado. Dado el conjunto A={b,c,d}, averigua todos los subconjuntos de A.

Resolucion. Para no olvidar ningún subconjunto, lo mejor es seguir un orden:

- Subconjuntos de A que no tienen ningún elemento: solo hay uno, el conjunto vacío: ∅.
- Subconjuntos de A que tienen un elemento: hay tres, uno por cada elemento: {b}, {c} y {d}. (Observa que son conjuntos con un solo elemento.)
- Subconjuntos de A que tienen dos elementos: también hay tres, uno por cada elemento que dejemos fuera del subconjunto: {c,d}, {b,d} y {b,c}.
- Subconjuntos de A que tienen tres elementos: solo hay uno, el propio conjunto A.

Así que en total hemos encontrado ocho subconjuntos: ∅, {b}, {c}, {d}, {c,d}, {b,d}, {b,c} y A.

Propiedades y definición

Sea A un conjunto cualquiera. Se verifica:

- ∅⊂A. Es decir: el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.
- A⊂A. Es decir: cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Debido a estas propiedades, los subconjuntos ∅ y A de A se llaman subconjuntos **impropios** de A; todos los demás subconjuntos se llaman subconjuntos **propios**.

Definición

Si A es un conjunto cualquiera, llamamos **partes de A** al conjunto de todos los subconjuntos de A; se escribe P(A).

Ejemplo 2

A={b,c,d} ⇒ P(A)={∅,{b},{c},{d},{c,d},{b,d},{b,c},A}

Propiedad

Si el cardinal del conjunto A es «n», el cardinal de partes de A es «2^n».

Simbólicamente: card(A)=n ⇒ card(P(A))=2^n.

Comentario: más adelante en este nivel podrás demostrar tú mismo esta propiedad usando lo que aprendas de combinatoria.

Ejemplo 3

A={b,c,d} ⇒ card(A)=3; se verifica que card(P(A))=2^3=8.

Curiosidad importante

Aunque parezca algo inútil y forzado, podemos considerar el conjunto «partes del conjunto vacío». Pero realmente es importante en la teoría matemática avanzada de los números naturales.

Veamos: P(∅)={∅}. Es decir: el conjunto vacío solo tiene un subconjunto, que es el propio conjunto vacío. (Suena raro, lo sabemos, pero es así; piénsalo bien).

Incluso se verifica la propiedad de los cardinales:

card(∅)=0 y card(P(∅))=2^0=1.

