Números combinatorios

Las combinaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» (con $m \geqslant n$) también reciben el nombre de número combinatorio.

En ese caso se escribe $\binom{m}{n}$ y se lee «m sobre n». Es decir:

$$\boxed{\binom{m}{n} = C_{m,n}}$$

Por tanto, podremos calcular los números combinatorios con cualquiera de las fórmulas de las combinaciones y en la calculadora con la misma tecla.

Propiedades ya conocidas

Vamos a escribir algunas propiedades ya presentadas de las combinaciones escritas como números combinatorios:

1. $\binom{m}{0} = 1$ 2. $\binom{m}{m} = 1$ 3. $\binom{m}{1} = m$ 4. $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$

Propiedad

Vemos ahora una propiedad que no es tan obvia, pero es muy interesante:

$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$. **Nota**: expresión equivalente a $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$

Ejemplo: $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$. Comprobación: $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$

Demostración

Es posible desarrollar al menos dos demostraciones de esta propiedad usando las dos fórmulas para calcular las combinaciones, pero esas demostraciones requieren un uso de las fracciones algebraicas que presentaremos en este curso un poco más adelante, en este mismo nivel.

Nos parece más oportuno mostrar una demostración basada en la propia definición de combinaciones: hay que demostrar que $C_{m+1,n+1} = C_{m,n} + C_{m,n+1}$

Las combinaciones de «m+1» elementos tomados de «n+1» en «n+1» se pueden obtener sumando dos tipos de combinaciones: las que tienen un elemento determinado de los «m+1» y las que no lo tienen. Para calcular las primeras, hay que elegir de entre los «m» elementos aparte del elemento determinado qué «n» elementos le acompañarán (esto es, $C_{m,n}$). Para calcular las segundas, hay que elegir de entre los «m» elementos aparte del elemento determinado qué «n+1» elementos formarán la combinación (esto es, $C_{m,n+1}$). Te puede ayudar esta figura: