Resolución de ecuaciones exponenciales con logaritmos

En situaciones reales, casi siempre es necesario recurrir al uso de logaritmos para resolver las ecuaciones exponenciales. Además, esto abre un mayor abanico de técnicas de resolución. Vamos a explorar una técnica que ya usamos anteriormente y otra nueva, que requiere usar logaritmos desde los primeros pasos. Presta atención al uso correcto de la calculadora para obtener las soluciones con precisión.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da las soluciones con cinco cifras significativas:

① $9^x - 3^{x+1} = 27$

② $7^x = 5^{x+1}$

Resoluciones

① Tomamos como incógnita auxiliar $z = 3^x$.

$9^x - 3^{x+1} = 27 \Rightarrow (3^2)^x - 3^x \cdot 3^1 = 27 \Rightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x = 27 \Rightarrow z^2 - 3z = 27 \Rightarrow z^2 - 3z - 27 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{117}}{2} = \begin{cases} 6{,}91 \\ -3{,}91 \end{cases}$$

Calculadora: `(` `3` `+` `√‾` `1` `1` `7` `)` `÷` `2` `STO` `M` `=` ⇰ 6.908326913

Guardamos la primera solución en una memoria para usarla más adelante con toda precisión, aunque en el papel la escribamos con menos precisión.

Calculadora: `(` `3` `–` `√‾` `1` `1` `7` `)` `÷` `2` `=` ⇰ -3.908326913

Como la segunda solución es negativa, sabemos que no la usaremos más.

$z = 6{,}91 \Rightarrow 3^x = 6{,}91 \Rightarrow x = \log_3 6{,}91 = 1{,}7592$

Calculadora: `log` `RCL` `M` `÷` `log` `3` `=` ⇰ 1.759244369

$z = -3{,}91 \Rightarrow 3^x = -3{,}91 \rightarrow$ sin solución

Solución: $x = 1{,}7592$

② Te mostramos dos métodos distintos para resolver esta ecuación:

Método 1. Igualando los logaritmos decimales o neperianos de cada miembro, aplicando la propiedad de la potencia de un logaritmo y despejando la incógnita:

$7^x = 5^{x+1} \Rightarrow \ln(7^x) = \ln(5^{x+1}) \Rightarrow x \cdot \ln 7 = (x+1) \cdot \ln 5 \Rightarrow x \cdot \ln 7 = x \cdot \ln 5 + \ln 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot \ln 7 - x \cdot \ln 5 = \ln 5 \Rightarrow x \cdot (\ln 7 - \ln 5) = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 7 - \ln 5} = 4{,}7833$$

Calculadora: `ln` `5` `÷` `(` `ln` `7` `–` `ln` `5` `)` `=` ⇰ 4.783271062

Método 2. Como 5^x nunca es 0, podemos dividir los dos miembros entre 5^x:

$$7^x = 5^{x+1} \Rightarrow \frac{7^x}{5^x} = \frac{5^{x+1}}{5^x} \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x = 5 \Rightarrow x = \log_{\frac{7}{5}} 5 = \frac{\ln 5}{\ln \frac{7}{5}} = 4{,}7833$$

Calculadora: `ln` `5` `÷` `ln` `(` `7` `÷` `5` `)` `=` ⇰ 4.783271062

Solución: $x = 4{,}7833$

