

## Simplificación de expresiones con un logaritmo

Podemos usar una o más propiedades de los logaritmos para escribir de un modo más sencillo muchas expresiones. En este contexto, «más sencillo» significa «con operaciones más simples»; por ejemplo, una suma es más sencilla que un producto. Este proceso se llama a veces «desarrollar» el logaritmo o la expresión.

Es fundamental reconocer en qué orden hay que aplicar las propiedades: hay que hacerlo en el orden inverso al de cálculo.

### Enunciados

Escribe del modo más sencillo posible las siguientes expresiones:

$$\textcircled{1} \log_a(p^2:q) \quad \textcircled{2} \log_a(pq)^3 \quad \textcircled{3} \log_a \frac{\sqrt{p}}{q^4} \quad \textcircled{4} \log_a \frac{p}{qr} \quad \textcircled{5} \log_a \sqrt[3]{p^4 \cdot q^5}$$

### Resoluciones

- ① Para calcular  $p^2:q$  la primera operación es el cuadrado y la segunda es la división; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula de la división y luego la de la potencia.

$$\log_a(p^2:q) = \log_a p^2 - \log_a q = 2 \cdot \log_a p - \log_a q$$

- ② Para calcular  $(pq)^3$  la primera operación es el producto y la segunda es el cubo; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula de la potencia y luego la del producto.

$$\log_a(pq)^3 = 3 \cdot \log_a(pq) = 3 \cdot (\log_a p + \log_a q) = 3 \cdot \log_a p + 3 \cdot \log_a q$$

Podemos desarrollar el producto o dejar el paréntesis, según convenga.

- ③ Para calcular  $\frac{\sqrt{p}}{q^4}$  las primeras operaciones son la raíz cuadrada y la potencia, que se pueden calcular a la vez, y la última es el cociente; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula del cociente y luego las otras dos, que podemos realizar en el mismo paso.

$$\log_a \frac{\sqrt{p}}{q^4} = \log_a \sqrt{p} - \log_a q^4 = \frac{\log_a p}{2} - 4 \cdot \log_a q$$

- ④ Para calcular  $\frac{p}{qr}$  la primera operación es el producto que hay en el denominador y la segunda es el cociente; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula del cociente y luego la del producto.

$$\log_a \frac{p}{qr} = \log_a p - \log_a(qr) = \log_a p - (\log_a q + \log_a r) = \log_a p - \log_a q - \log_a r$$

- ⑤ Para calcular  $\sqrt[3]{p^4 \cdot q^5}$  las primeras operaciones son las potencias, luego el producto y por fin la raíz; así que para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula de la raíz, luego la del producto y por último las potencias.

$$\log_a \sqrt[3]{p^4 \cdot q^5} = \frac{\log_a(p^4 \cdot q^5)}{3} = \frac{\log_a p^4 + \log_a q^5}{3} = \frac{4 \cdot \log_a p + 5 \cdot \log_a q}{3}$$

**Nota:** cuando tengas práctica, podrás saltarle pasos.