Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $4\cdot 3^{x+1}-3^{x+2}+5\cdot 3^{x-1}=\frac{14}{9}$ ② $25^x-6\cdot 5^x=-5$ ③ $8^x-2^{x+1}=56$

Resoluciones

① Utilizamos la incógnita auxiliar $z=3^x$

$$4\cdot 3^{x+1}-3^{x+2}+5\cdot 3^{x-1}=\frac{14}{9} \Rightarrow 4\cdot 3^x\cdot 3^1-3^x\cdot 3^2+5\cdot\frac{3^x}{3^1}=\frac{14}{9} \Rightarrow 4\cdot z\cdot 3-z\cdot 9+5\cdot\frac{z}{3}=\frac{14}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z-9z+\frac{5}{3}z=\frac{14}{9} \Rightarrow 3z+\frac{5}{3}z=\frac{14}{9} \Rightarrow 27z+15z=14 \Rightarrow 42z=14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{14}{42} \Rightarrow z=\frac{1}{3}$$

Resolvemos la ecuación exponencial simple resultante:

$$z=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=3^{-1} \Rightarrow x=-1$$

Solución: $x=-1$

② Utilizamos la incógnita auxiliar $z=5^x$

$$25^x-6\cdot 5^x=-5 \Rightarrow (5^x)^2-6\cdot 5^x=-5 \Rightarrow z^2-6z=-5 \Rightarrow z^2-6z+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}5\\1\end{cases}$$

Resolvemos las dos ecuaciones exponenciales simples resultantes:

$z=5 \Rightarrow 5^x=5 \Rightarrow 5^x=5^1 \Rightarrow x=1$; $z=1 \Rightarrow 5^x=1 \Rightarrow 5^x=5^0 \Rightarrow x=0$

Solución: $x=\begin{cases}0\\1\end{cases}$

③ Utilizamos la incógnita auxiliar $z=2^x$

Entonces, $8^x=(2^3)^x=2^{3x}=(2^x)^3=z^3$

$$8^x-2^{x+1}=56 \Rightarrow 8^x-2\cdot 2^x=56 \Rightarrow z^3-2z=56 \Rightarrow z^3-2z-56=0$$

Para resolver esta ecuación de tercer grado, buscamos una raíz entre los divisores de 56. Encontramos que 4 es una raíz: $4^3-2\cdot 4-56=0$

Dividimos el polinomio «$z^3-2z-56$» entre el polinomio «$z-4$» y llegamos a:

$z^3-2z-56=0 \Rightarrow (z-4)(z^2+4z+14)=0 \Rightarrow z=4$, ya que $z^2+4z+14=0$ no tiene ninguna solución.

Resolvemos la ecuación exponencial simple resultante:

$$z=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow 2^x=2^2 \Rightarrow x=2$$

Solución: $x=2$

