Método para simplificar fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica hay que encontrar un polinomio que divida al numerador y el denominador, dividir ambos entre él y luego eliminarlo.

Ejemplo 1

Enunciado: simplifica lo máximo que sea posible $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}$

Resolución

Observamos que x=1 es raíz del numerador: $1^3-1^2+2\cdot 1-2=0$.

Observamos que x=1 es raíz del denominador: $1^3-1^2+1-1=0$.

Por tanto, el numerador y el denominador son divisibles entre «x–1».

Hacemos las divisiones (podemos usar la regla de Ruffini):

$(x^3-x^2+2x-2):(x-1)=x^2+2$; $(x^3-x^2+x-1):(x-1)=x^2+1$

Ya podemos simplificar: $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{(x-1)(x^2+2)}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$

La fracción algebraica obtenida es irreducible porque el numerador y el denominador son polinomios irreducibles, por ser de grado dos y no tener raíces.

Solución: $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$

La verdadera dificultad del método

La parte más complicada del método es encontrar algún polinomio que divida al numerador y al denominador. Si el polinomio fuera de la forma «x–a», siendo «a» un número entero, «a» deberá ser un divisor del término independiente del numerador y del denominador, por lo que sería fácil detectarlo; pero «a» podría ser un número no entero (por lo que no hay método sencillo para averiguarlo) o incluso el polinomio podría ser de grado dos.

En los casos más difíciles, será necesario factorizar completamente el numerador y el denominador; y, en muchas ocasiones, será un trabajo sin recompensa, porque puede ser que no haya divisores comunes.

Ejemplo 2

Enunciado: simplifica lo máximo que sea posible $\frac{x^3-2x^2+7x-14}{x^3-2x^2+5x-10}$

Resolución

Los divisores comunes a «–14» y a «–10» son 1, –1, 2 y –2. Vamos probando si alguno de ellos es raíz del numerador y del denominador y encontramos el 2.

Hacemos las divisiones (podemos usar la regla de Ruffini):

$(x^3-2x^2+7x-14):(x-2)=x^2+7$; $(x^3-2x^2+5x-10):(x-2)=x^2+5$

Ya podemos simplificar: $\frac{x^3-2x^2+7x-14}{x^3-2x^2+5x-10}=\frac{(x-2)(x^2+7)}{(x-2)(x^2+5)}=\frac{x^2+7}{x^2+5}$

La fracción algebraica obtenida es irreducible porque el numerador y el denominador son polinomios irreducibles, por ser de grado dos y no tener raíces.

Solución: $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x^2+7}{x^2+5}$

