Definición de mínimo común múltiplo de varios polinomios

Llamamos polinomio mínimo común múltiplo de varios polinomios a cualquier polinomio que sea múltiplo de todos ellos y que verifique que no hay ningún polinomio de grado inferior al suyo que también sea múltiplo de todos.

Notación

Dados los polinomios P(x) y Q(x), su polinomio mínimo común múltiplo se escribe mcm(P(x),Q(x)).

Observación

Hay infinitos polinomios que son el polinomio mínimo común múltiplo de varios polinomios, pero cualquiera de ellos se puede obtener multiplicando otro por una constante distinta de cero. Por tanto, se dice que el polinomio mínimo común múltiplo es único salvo una constante.

Cálculo del mínimo común múltiplo de varios polinomios

Paso 1. Se factorizan todos los polinomios de los que hay que calcular el mínimo común múltiplo.

Paso 2. El polinomio mínimo común múltiplo es el producto de un número cualquiera distinto de cero y de todos los factores que aparezcan en las factorizaciones de los polinomios; es muy común dejarlo factorizado.

Ejemplo 1

Enunciado. Averigua el mínimo común múltiplo de los polinomios

$P(x) = x^4+6x^3+9x^2$ y $Q(x) = x^4+3x^3$.

Resolución

Factorizamos P(x): $P(x) = x^4+6x^3+9x^2 = x^2(x^2+6x+9) = x^2(x+3)^2$

Factorizamos Q(x): $Q(x) = x^4+3x^3 = x^3(x+3)$

Vemos que en las descomposiciones aparecen dos polinomios:

- «x^3», que incluye al polinomio «x^2».
- «$(x+3)^2$», que incluye al polinomio «$x+3$».

Por tanto, hay que multiplicar «x^3» y «$(x+3)^2$». Podríamos multiplicar también por cualquier número distinto de cero, pero en este caso solo serviría para complicar la expresión. La solución es «$x^3(x+3)^2$»; podemos desarrollar la expresión si nos lo piden, pero normalmente es más útil dejarla así.

Solución: $\text{mcm}(P(x),Q(x)) = x^3(x+3)^2$

Ejemplo 2

Enunciado. Averigua el mínimo común múltiplo de los polinomios

$A(x) = x(x+1)$, $B(x) = (x-5)^2$ y $C(x) = (x-1)^3$

Resolución

Los polinomios ya están factorizados. Vemos que no hay ningún factor que aparezca en más de uno de los polinomios dados, luego en este caso el polinomio mínimo común múltiplo coincide con el producto (salvo una constante). Podemos desarrollar el producto o no hacerlo, pero casi siempre es preferible disponer del producto, entre otros motivos porque así se ven fácilmente sus raíces.

Solución: $\text{mcm}(A(x),B(x),C(x)) = x(x+1)(x-5)^2(x-1)^3$