

Área y volumen de un tronco de pirámide

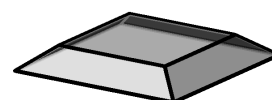
Existen varias fórmulas para calcular el área y el volumen de un tronco de pirámide en algunos casos concretos. Sin embargo, es más útil en la enseñanza secundaria aprender los métodos generales de cálculo, que precisamente son los que se utilizan para demostrar las fórmulas.

Ejemplo sencillo

Enunciado. Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 3 metros de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 24 metros de lado y 16 metros de lado.

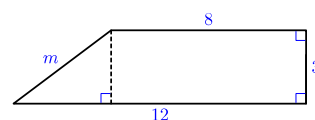
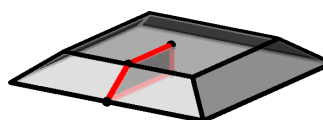
Resolución

Aunque no sea estrictamente necesario, suele ser útil hacer un dibujo de la situación; no es necesario que sea exacto ni perfecto, se usa para ayudarnos a pensar.



Para calcular el área de un tronco de pirámide hay que sumar las áreas de cada base y el área de todas las caras laterales. Como las bases son diferentes, cada área es un cálculo diferente; para calcular el área de cada cara lateral, que es un trapecio, hay que conocer la longitud de la apotema del tronco porque es la altura del trapecio.

En este caso, como las bases son cuadrados, las apotemas de las bases miden la mitad que la arista de la base. Si llamamos m a la longitud de la apotema del tronco, tenemos:

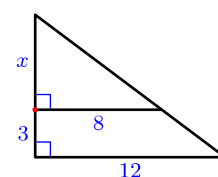
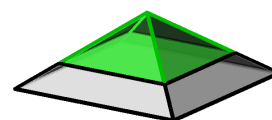
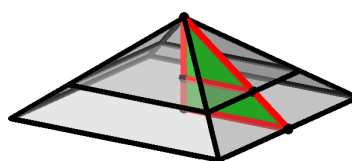


$$m^2 = 3^2 + (12-8)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow m = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Por tanto, Área} = 24^2 + 16^2 + 4 \cdot 5 \cdot \frac{24+16}{2} = 576 + 256 + 20 \cdot 20 = 1232$$

Para calcular el volumen del tronco de pirámide hay que imaginar la pirámide de la que proviene y restar los volúmenes de las dos pirámides que aparecen en el proceso (grande y pequeña).

La clave es calcular las alturas de las dos pirámides, puesto que las áreas de las bases son sencillas de calcular. Nos basamos en los dos triángulos rectángulos semejantes que se forman con las alturas, las apotemas de las bases y las apotemas de las pirámides.



Usando la proporcionalidad de los lados de los triángulos, tenemos:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+3}{12} \Rightarrow 12x = 8(x+3) \Rightarrow 3x = 2(x+3) \Rightarrow 3x = 2x+6 \Rightarrow x=6$$

La altura de la pirámide menor es 6 y la de la mayor $x+3 = 6+3 = 9$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 6 = 576 \cdot 3 - 256 \cdot 2 = 1728 - 512 = 1216$$

Solución \rightarrow área: 1232 m^2 , volumen: 1216 m^3