

Razón de semejanza y volumen de cuerpos semejantes

Si la razón de semejanza de dos cuerpos es « r », entonces el cociente de los volúmenes de los dos cuerpos es « r^3 ».

Demostración para ortoedros

La demostración para ortoedros es muy fácil de entender y muestra muy bien cuál es la idea principal de esta propiedad.

Supongamos dos ortoedros semejantes llamados Z y Z' tales que su razón de semejanza sea « r »; llamamos a , b y c a las dimensiones de Z y a' , b' y c' a las dimensiones de Z' .

Sabemos que $\frac{a'}{a}=r$, $\frac{b'}{b}=r$ y $\frac{c'}{c}=r$. Por lo tanto, $a' = ar$, $b' = br$ y $c' = cr$.

Dividimos las volúmenes de los ortoedros y, efectivamente, es « r^3 »:

$$\frac{\text{Volumen de } Z'}{\text{Volumen de } Z} = \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a \cdot b \cdot c} = \frac{ar \cdot br \cdot cr}{a \cdot b \cdot c} = \frac{r^3 \cdot a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = r^3$$

Demostración para esferas

Los cuerpos semejantes no tienen por qué ser poliedros, ya que la semejanza es un concepto muy general y hay que mantener una mente abierta. Tiene sentido, por tanto, ver cómo se demuestra esta propiedad para esferas.

Supongamos dos esferas E y F tales que su razón de semejanza sea « r »; llamamos s al radio de E y t al radio de F .

Sabemos que $\frac{t}{s}=r$, luego $t=sr$.

Dividimos los volúmenes de las esferas y, efectivamente, es « r^3 »:

$$\frac{\text{Volumen de } F}{\text{Volumen de } E} = \frac{\frac{4}{3}\pi t^3}{\frac{4}{3}\pi s^3} = \frac{t^3}{s^3} = \frac{(sr)^3}{s^3} = \frac{s^3 \cdot r^3}{s^3} = r^3$$

Enunciado

Dos poliedros son semejantes. La arista menor del primero mide 93 metros y su volumen mide 3256 metros cúbicos. La arista menor del segundo mide 107 metros. Calcula con cinco cifras significativas el volumen del segundo poliedro.

Resolución

La razón de semejanza es $r = \frac{107}{93}$. La podemos calcular explícitamente y luego usar una memoria de la calculadora, simplificarla (si se pudiera) o dejarla indicada.

Llamamos V y V' a los volúmenes de los poliedros; sabemos que $\frac{V'}{V} = r^3$, luego

$$\frac{V'}{3256} = \left(\frac{107}{93}\right)^3 \Rightarrow V' = 3256 \cdot \left(\frac{107}{93}\right)^3 = 4958,9. \text{ Solución: } 4958,9 \text{ m}^3$$