## Factorización de un polinomio en polinomios irreducibles

Para aprovechar al máximo las ventajas de la factorización de polinomios, casi siempre nos interesa factorizar un polinomio de modo que todos los factores sean polinomios irreducibles. Este proceso es equivalente a factorizar un número natural en factores primos.

## Método para factorizar un polinomio en polinomios irreducibles

Realmente, la idea del método es muy sencilla: se va aplicando uno de los cuatro métodos disponibles hasta que no se pueda aplicar ninguno más. La dificultad puede surgir porque a veces se puede aplicar más de un método en una determinada situación: sencillamente, usa el método que quieras; si lo aplicas bien, llegarás al resultado correcto por cualquier método.

## Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios en polinomios irreducibles:

① $6x^4+5x^3-29x^2-10x$

② $x^4-16$

## Resoluciones

① Para facilitar la explicación, vamos a ir poniendo nombres a los polinomios:

$P(x) = 6x^4+5x^3-29x^2-10x$

El único metodo que podemos aplicar para factorizar P(x) es extraer factor común la «x»: $P(x) = (6x^3+5x^2-29x-10)\cdot x$. Llamamos $Q(x) = 6x^3+5x^2-29x-10$.

Para factorizar Q(x) solo podemos utilizar el método de la división exacta: las posibles raíces enteras son los divisiores del término independiente: 1, –1, 2, –2, 5, –5, 10 y –10. Vamos probando y encontramos que 2 es una raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -29 & -10 \\ 2 & & 12 & 34 & 10 \\ \hline & 6 & 17 & 5 & 0 \end{array}$$

Obtenemos que $Q(x) = (6x^2+17x+5)\cdot(x-2)$. Llamamos $R(x) = 6x^2+17x+5$.

Para factorizar R(x) solo podemos utilizar el método de factorización de polinomios de grado 2. No podemos volver a aplicar el método de división exacta porque ninguno de los divisores del término independiente es raíz de R(x).

$$6x^2+17x+5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 6\cdot 5}}{2\cdot 6} = \ldots = \frac{-17\pm 13}{12} = \begin{cases} \dfrac{-4}{12} \\ \dfrac{-30}{12} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Luego $R(x) = 6\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)$ o bien $R(x) = (3x+1)\cdot(2x+5)$, como queramos.

A lo largo del proceso hemos obtenido cuatro polinomios de grado 1, que son irreducibles, luego ya podemos dar la solución final:

Solución: $6x^4+5x^3-29x^2-10x = x\cdot(x-2)\cdot(3x+1)\cdot(2x+5)$

② Podemos usar productos notables: $x^4-16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$

$x^2+4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \rightarrow$ sin solución, luego $x^2+4$ es irreducible.

Solución: $x^4-16 = (x^2+4)(x+2)(x-2)$