

Fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado completas

Como ya vimos y practicamos en el nivel 2, las ecuaciones de segundo grado completas se resuelven usando esta fórmula:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Demostración de la fórmula

Partimos de la expresión $ax^2+bx+c=0$; usando el cuadrado de una suma para hacer una factorización, transformaremos la expresión en otra en la que la incógnita aparecerá solo una vez; a continuación, despejaremos la incógnita.

$$\text{Multiplicamos por } 4a: ax^2+bx+c=0 \Rightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

$$\text{Cambiamos de miembro el } 4ac: 4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Rightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac$$

$$\text{Añadimos } b^2 \text{ a los dos miembros: } 4a^2x^2+4abx=-4ac \Rightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

$$\text{Factorizamos el primer miembro: } 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac \Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac$$

$$\text{Despejamos la incógnita: } (2ax+b)^2=b^2-4ac \Rightarrow 2ax+b = \pm \sqrt{b^2-4ac} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2-4ac} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El primer paso que se da en la demostración parece sacado de la nada, que lo damos porque sí; pero realmente se llega a él tras probar cuál es el mejor método de obtener un monomio que sea cuadrado perfecto a partir del monomio ax^2 . Quizá pienses: ¿y el 4, de dónde sale? Hace falta para cuadrar el doble producto de los dos sumandos.

La humanidad no llega a estas demostraciones tan fácilmente, se tarda tiempo en encontrar el mejor método de resolver cada problema y también de mostrarlo a los demás. La investigación consiste en dedicar mucho tiempo a desechar errores y buscar, a veces a tientas, el mejor camino.

Esta demostración no es fácil, pero si le dedicas tiempo a entenderla acabarás por apreciar su ingenio y quizá te animes a investigar tú mismo en algún problema que se resulte atractivo.

Ejemplo

Vamos a resolver la ecuación $3x^2+13x-10=0$ dando los mismos pasos que en la demostración como una ayuda para entenderla:

$$3x^2+13x-10=0 \Rightarrow 36x^2+156x-120=0 \Rightarrow 36x^2+156x=120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36x^2+156x+169=169+120 \Rightarrow (6x+13)^2=289 \Rightarrow 6x+13 = \pm \sqrt{289} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x+13 = \begin{cases} 17 \\ -17 \end{cases} \Rightarrow 6x = \begin{cases} 17-13 \\ -17-13 \end{cases} \Rightarrow 6x = \begin{cases} 4 \\ -30 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{4}{6} \\ \frac{-30}{6} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -5 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -5 \end{cases}$$