

Relación entre factores primos, divisores y múltiplos

Si un número divide a otro y es menor que él, todos los divisores primos del número menor son también divisores del número mayor.

Ejemplo 1

Comparamos el 12 y el 168.

Sus descomposiciones en factores primos son $12 = 2^2 \cdot 3$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Para compararlos mejor, los escribimos sin usar potencias:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, 168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Visualizamos en color verde los divisores de 12 y en color azul los divisores de 168 que no corresponden con divisores de 12:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, 168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Se observa que todos los divisores primos de 12 son también divisores de 168.

Comprobación de divisibilidad

Cuando dos números están factorizados, es muy sencillo saber si uno es divisor del otro: todos los factores de uno deben ser factores del otro.

Ejemplo 2

Averigua si $a = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ es divisor de $b = 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^3$.

Respuesta: sí, porque todos los divisores primos de a lo son de b .

Para entenderlo mejor, usamos la codificación por colores del ejemplo 1:

$$a = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11, b = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$$

Observa que no es necesario saber el valor concreto de los números a y b . Esta manera de trabajar en matemáticas es muy potente: hacer razonamientos generales que nos liberen de operaciones particulares.

División cuando los números están factorizados

Cuando un número divide a otro y es menor que él, si se dispone de la factorización de los dos, hacer la división se puede reducir a una multiplicación (a veces, ni siquiera eso).

Ejemplo 3

Divide 168 entre 12 sabiendo que $12 = 2^2 \cdot 3$ y $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Para entender mejor cómo hacer la división, escribimos las factorizaciones sin potencias y con los colores del ejemplo 1:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, 168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Ahora la división se puede hacer así:

$$168 : 12 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7) : (2 \cdot 2 \cdot 3) = 2 \cdot 7 = 14.$$

Ejemplo 4

Divide 3465 entre 315 sabiendo que $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ y $3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Para entender mejor cómo hacer la división, escribimos las factorizaciones con los colores de la explicación anterior:

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7, 3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

La división:

$$3465 : 315 = (3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) : (3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 11.$$