

Bisectriz de un ángulo

El problema geométrico de trazar la bisectriz de un ángulo se traduce en geometría analítica como encontrar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo conocidas las coordenadas del vértice y de un punto de cada semirrecta. Para encontrarla, caracterizaremos la bisectriz como el conjunto de puntos del plano que equidistan de las dos semirrectas y utilizaremos una propiedad adicional.

Enunciado

Averigua la ecuación implícita de «z», la recta bisectriz del ángulo AVB. Datos: A = (4,9), V = (-2,3), B = (15,-4).

Resolución

Llamamos «r» a la recta que pasa por V y A.

$$\overrightarrow{VA} = (4 - (-2), 9 - 3) = (6, 6) \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{1}{6} (6, 6) = (1, 1) \Rightarrow \vec{n}_r = (1, -1)$$

$$\vec{n}_r = (1, -1) \Rightarrow r \equiv x - y + c = 0; V = (-2, 3) \in r \Rightarrow -2 - 3 + c = 0 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow r \equiv x - y + 5 = 0$$

Llamamos «s» a la recta que pasa por V y B.

$$\overrightarrow{VB} = (15 - (-2), -4 - 3) = (17, -7) \Rightarrow \vec{v}_s = (17, -7) \Rightarrow \vec{n}_s = (7, 17) \Rightarrow s \equiv 7x + 17y + c = 0$$

$$V = (-2, 3) \in s \Rightarrow 7(-2) + 17 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -37 \Rightarrow s \equiv 7x + 17y - 37 = 0$$

Llamamos P = (x,y) a un punto cualquiera de «z». Se verifica:

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x - y + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|7x + 17y - 37|}{\sqrt{7^2 + 17^2}} \Rightarrow \frac{|x - y + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x + 17y - 37|}{\sqrt{338}}$$

Vamos a usar propiedades de los radicales: $\sqrt{338} = \sqrt{2 \cdot 13^2} = 13\sqrt{2}$. Así podremos simplificar la expresión. En los casos en que no se puede simplificar y hay que trabajar con radicales, la operación se complica mucho (no lo verás en secundaria).

$$\frac{|x - y + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x + 17y - 37|}{13\sqrt{2}} \Rightarrow |x - y + 5| = \frac{|7x + 17y - 37|}{13} \Rightarrow 13|x - y + 5| = |7x + 17y - 37|$$

Ahora usamos la propiedad de que si dos números tienen el mismo valor absoluto, los números pueden ser iguales u opuestos:

$$\begin{cases} 13(x - y + 5) = 7x + 17y - 37 \\ 13(x - y + 5) = -(7x + 17y - 37) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} 6x - 30y + 102 = 0 \\ 20x + 4y + 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + 17 = 0 \\ 5x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos rectas perpendiculares, porque la condición de igualdad de distancias que hemos impuesto realmente la cumple cualquier punto de cualquiera de las dos rectas. Ahora hay que distinguir cuál de las dos es la bisectriz que buscamos. Si el dibujo es bueno, podemos usar las pendientes, los vectores de dirección o los normales.

Sin dibujo, sustituimos las coordenadas de A y B en el primer miembro de una de las ecuaciones: si se obtienen números de distinto signo, esa es la recta; si se obtienen números del mismo signo, es la otra. Esto se debe a que el primer miembro de la ecuación implícita de una recta da valores del mismo signo en todos los puntos del mismo semiplano y A y B están en distintos semiplanos respecto a la bisectriz, pero en el mismo semiplano respecto a la otra recta.

(x - 5y + 17) en A da -24 y (x - 5y + 17) en B da 52; son valores de distinto signo.

Solución: $z \equiv x - 5y + 17 = 0$

