

Vectores múltiplos entre sí

- * Si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores no nulos del plano, se dice que son múltiplos entre sí (o proporcionales) cuando se puede encontrar un número real α que verifique $\vec{v} = \alpha \vec{u}$.
- * Dos vectores son múltiplos entre sí solo cuando tienen la misma dirección.
- * El vector nulo se excluye de esta definición porque, multiplicado por cualquier número, siempre se obtiene otra vez el vector nulo.

Ejemplos

- ① Los vectores (1,3) y (5,15) son múltiplos entre sí porque $(5,15)=5(1,3)$.
- ② Los vectores (9,-6) y (-33,22) son múltiplos entre sí: $(-33,22)=\frac{-11}{3}(9,-6)$.

Obtención de vectores múltiplos

Dado un vector no nulo del plano, se pueden obtener infinitos múltiplos multiplicándolo por cualquier número distinto de cero. Esto suele ser útil para obtener un vector que tenga la misma dirección que otro, pero componentes más sencillas.

Ejemplo

- ③ **Enunciado:** averigua un vector múltiplo del $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{3}\right)$ que tenga componentes enteras lo más sencillas que sea posible.

Resolución: multiplicamos el vector por el mínimo común múltiplo de los dos denominadores, $\text{mcm}(5,3)=15$.

$$15 \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{3} \right) = \left(15 \cdot \frac{3}{5}, -15 \cdot \frac{1}{3} \right) = (9, -5). \text{ Solución: } (9, -5).$$

También valdría como solución el vector opuesto, el $(-9, 5)$.

Averiguar si dos vectores del plano son múltiplos

Es conveniente poder averiguar con rapidez si dos vectores del plano son múltiplos entre sí o no. Para ello, distinguiremos entre dos casos: si alguna componente es cero o si ninguna lo es (no pueden ser las dos de un vector cero a la vez porque el vector nulo se excluye de este estudio).

Alguna componente es cero

Si una de las dos componentes de un vector es cero, los vectores solo serán múltiplos cuando la misma componente del otro vector sea también cero.

- ④ Los vectores (0,5) y (0,7) son múltiplos.
- ⑤ Los vectores (3,0) y (7,1) no son múltiplos.

Ninguna componente es cero

Entonces, para que los vectores sean múltiplos sus componentes deben ser directamente proporcionales, algo que averiguaremos con los productos cruzados. Es decir, los vectores (u_1, u_2) y (v_1, v_2) serán múltiplos solo cuando $u_1 v_2 = u_2 v_1$.

- ⑥ Los vectores (2,-8) y (-3,12) son múltiplos porque $2 \cdot 12 = -8(-3)$
- ⑦ Los vectores (5,7) y (2,3) no son múltiplos porque $5 \cdot 3 \neq 7 \cdot 2$